ЧЕТВЪРТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“
БУРГАСКИ СВОБОДЕН УНИВЕРСИТЕТ
13 – 15 ноември 2015 г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА Б

1. Да се пресметне стойността на израза $\sqrt{5+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{5+\sqrt{3}}$.

2. Да се пресметне стойността на израза $1+\cfrac{1}{\sqrt{2}+\cfrac{1}{\sqrt{3}+\cfrac{1}{\sqrt{4}+\cfrac{1}{\sqrt{5}+\cfrac{1}{\sqrt{6}}}}}}$.

3. Да се пресметне

$$\sqrt{2015+\sqrt{2015+\sqrt{2015+\sqrt{2015+\sqrt{2015+\sqrt{2015+\sqrt{2015}}}}}}}-\sqrt{2015+\sqrt{2015+\sqrt{2015+\sqrt{2015+\sqrt{2015+\sqrt{2015}}}}}}.$$

4. Да се пресметне сумата $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+\cdots+\frac{1}{50^{50}}$.

5. Да се сравнят неперовото число e и стойността на израза $\frac{1^1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\cdots+\frac{2014^{2014}}{2015^{2015}}$.

6. Да се покаже, че за всяко естествено число n е вярно неравенството $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\sqrt{e}$.

7. Да се опрости изразът $\frac{x^4+7x^3+21x^2+63x+108}{x^5+4x^4-81x-324}\cdot\frac{3x^5+10x^4-81x^2-270x}{3x^3+19x^2+57x+90}$.

8. Да се докаже, че ако към произведението на 4 последователни цели числа се прибави 1, се получава точен квадрат?

9. Да се намерят корените на уравнението $x^3-5x+2=0$.

10. Да се реши уравнението $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$.

11. Колко реални корена има уравнението $100\cos\left(10x^2\right)=x^4+1$ в интервала $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$?

12. Да се намери най-близкият до 8 корен на уравнението $x-\operatorname{tg}x=0$.

13. Да се намери броят на делителите на числото 1691146334800.

14. Да се определи за колко цели числа n от 1 до 2015 числото $3n^5+11$ е просто.

15. Колко пъти се среща всяка от цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 сред първите 2015 цифри на числото π?

16. Да се построи полином от най-ниска степен с реални коефициенти, който има прости нули 2, 3 и $1+i$ и двукратна нула 1.

17. Дадени са функцията $f(x)=x^{2015}-2^{71}\cdot x^{1944}$ и матрицата $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 5 & -3 & -15\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}$. Да се пресметне $f(A)$.

18. Да се докаже, че ако $0 < a \le b \le c$, то $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ \dfrac{1}{b^3+c^3} & \dfrac{1}{c^3+a^3} & \dfrac{1}{a^3+b^3} \end{vmatrix} \ge 0$.

19. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} 2x+(2-a)y=6 \\ (a+1)x+y=3 \end{array} \right.$, където a е реален параметър.

20. Да се намери уравнението на сфера, която минава през точките $A(3,1,5)$, $B(4,-8,1)$ и $C(-5,1,-3)$, ако е известно, че центърът ѝ лежи в равнината $2x+y-z-1=0$.

21. За функцията $f(n)$ е известно, че $f(1)=2$ и $f(n)=3f^2(n-1)-4$ при $n>1$. Да се пресметнат $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ и $f(5)$.

22. Да се пресметне границата $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n - n.a^{n-1}.(x-a)}{(x-a)^2}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$.

23. Да се определят интервалите на монотонност и локалните екстремуми на функцията $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 5.x^{\frac{2}{3}}$.

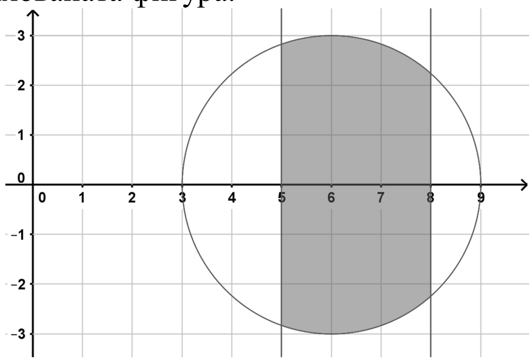
24. За кое естествено число n изразът $\dfrac{n^2}{1{,}001^n}$ става най-голям.

25. Да се докаже, че за всяко $x \in (-1,1)$ е изпълнено равенството $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\arcsin x$.

26. Да се пресметне $\displaystyle\int_0^{2015} \frac{x}{\sin x + 2015}\,dx.$

27. Да се пресметне дължината на дъгата, определена от графиката на функцията $y = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$ в интервала $1 \le x \le 2$.

28. Да се намери лицето на защрихованата фигура.



29. Да се намери лицето на фигурата, ограничена от кривите $y=\ln(x+2)$, $y=2\ln x$ и $y=0$.

30. Нека S е лицето на фигурата, заградена от абсцисната ос и графиката на функцията $f(x)=(x+2)(0{,}5-x)$. Да се намери за кои стойности на реалния параметър b правоъгълникът със страни $x=-2$, $y=0$, $x=0{,}5$ и $y=f(b)$ има лице S.

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност с изключение на задачите, в които изрично е посочена желаната точност.