II НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА

ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“, 17-19 ОКТОМВРИ 2013 Г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА В

1. Да се пресметне стойността на израза $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$, ако $x=2$ и $y=-1,5$.

2. Да се пресметне стойността на израза $\sqrt{\sqrt[3]{64}\left(4+\dfrac{1}{4}\right)+1}$ и да се представи като десетична дроб с 10 верни знака след десетичната запетая.

3. Да се сравнят по големина числата e^{π} и π^{e}.

4. Да се провери дали $7777^{2222}+2222^{7777}$ се дели на 9.

5. Да се пресметне стойността на израза $x_1^8+x_2^8-3x_1x_2$, където x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2-5x+11=0$.

6. Да се пресметне $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

7. Да се разложи на неразложими множители с реални коефициенти полинома $f(x)=x^4-4x^3+x^2-8x-2$.

8. Да се приведе в нормален вид полинома $(x-3)^{12}-(x+3)^{12}$.

9. Да се реши уравнението $\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}=4$.

10. Да се реши неравенството $\dfrac{1}{x+1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{4x}{x^2-1}\right)\geq x$.

11. Да се определи броят на положителните корени на уравнението $x^3-3\sqrt[3]{3}\,x+\sqrt{6}=0$.

12. Да се реши системата $\left|\begin{array}{l} 4x-3y+2z=-4 \\ 2x+y+z=3 \\ 7x-2y+3z=0. \end{array}\right.$

13. Да се пресметне детерминантата $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4 \end{vmatrix}$, ако $x_1<x_2<x_3<x_4$ са корените на уравнението $x^4+2x^3-4x^2-2x+1=0$.

14. Дадена е матрицата $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Да се пресметне A^{2013}.

15. Да се реши уравнението $A.X.A=B$, където $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Да се определят координатите на средата на отсечката, получена при пресичането на окръжността $k: x^2+y^2=9$ с правата $l: y=2x+3$.

17. Да се намери лицето на правоъгълника $ABCD$, ако $A(2,1)$, $B(0,4)$ и C лежи върху абсцисната ос.

18. В декартова координатна система са дадени равнината $\alpha: x-2y+z+3=0$ и точките $A(0,-1,1)$ и $B(1,2,3)$. Да се намери пресечната точка на правата AB и равнината α.

19. Да се докаже, че функцията $f(x)=x+\sin 2x$ удовлетворява равенството $f''(x)+4f(x)=4x$.

20. Да се начертае графиката на функцията $f(x)=x^4+4x^3-17118x^2+23996x+64015517$ така, че на графиката да се виждат локалните екстремуми на функцията и нулите ѝ.

21. Да се изследва функцията $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ и да се начертае графиката и в интервала $[-5,10]$.

22. Да се пресметне $\int \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$.

23. Да се пресметне $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4^x+1)(x^2+4)}$. Решението да бъде точно или с поне шест верни знака след десетичната запетая.

24. Да се провери верността на равенството $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$, ако $f(x)=\frac{x^2}{x^2+6}$.

25. Да се провери верността на равенството $(1+2+\cdots+n)^2=1^3+2^3+\cdots+n^3$.

26. Да се пресметне сумата $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}$.

27. Да се пресметне границата $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

28. Да се определи за кои стойности на реалния параметър a уравнението $\sin^4 x+\cos^4 x=a$ има решение?

29. Да се докаже, че ако k е естествено число, то $\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}+\operatorname{arctg}\frac{2^k-1}{2^k+1}=\frac{\pi}{4}$.

30. Дадени са функциите $f(x)=-x^2$ и $g(x)=a^2x^2+ax-4$, където a е реален параметър. Да се определи стойността на параметъра a, за която лицето на фигурата, заключена между графиките на двете функции, е най-голямо.

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност с изключение на задачите, в които изрично е посочена желаната точност.