ЧЕТВЪРТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“
БУРГАСКИ СВОБОДЕН УНИВЕРСИТЕТ
13 – 15 ноември 2015 г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

1. Да се пресметне $1+\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\sqrt[5]{5}}}}$.

2. Да се пресметне стойността на израза $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{98}{99}\cdot\frac{100}{101}$.

3. Да се опрости изразът $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}$, където $a>b>0$ са реални числа.

4. Да се изчисли стойността на израза $\frac{1}{1+x+x.y}+\frac{1}{1+y+y.z}+\frac{1}{1+z+z.x}$ за всички допустими стойности на променливите, ако $x.y.z=1$.

5. Да се намерят реалните нули на полинома $-1+x-x^2+3x^3-5x^4+x^5$.

6. Да се определят числата a и b така, че полиномът ax^4+bx^2+1 да се дели на $(x-2)^2$.

7. Да се реши уравнението $z^2-(2+i)z-1+7i=0$.

8. Да се намерят реалните корени на уравнението $\sqrt{x^3-100}=\sqrt[3]{x^2+100}$.

9. Да се реши уравнението $e^{2x}+\sin 3x=4$.

10. Да се намерят корените на уравнението $10e^{-0,1x^2}=\sqrt{2\pi+x}+\sin 2x$.

11. Да се намери най-голямото цяло число n, за което $2015!$ се дели без остатък на 2015^n.

12. Кои са целите числа n, за които числото $n^4+8n^3+17n^2+8n+1$ е просто.

13. Коя е последната цифра в десетичния запис на числото $\frac{2015}{5^{2015}}$?

14. Да се намерят всички естествени числа M, за които $M^{2015}-1$ се дели на 10000.

15. Измежду първите 50000 прости числа да се намерят тези, които съдържат в десетичния си запис последователността 2015 (най-малкото такова число е 120157).

16. Колко пъти се среща всяка от цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 сред първите 2015 цифри на неперовото число e?

17. Да се намерят собствените стойности и собствените вектори на матрицата $A=\begin{pmatrix}-13 & -32 & -61\\ 10 & 23 & 38\\ -2 & -4 & -4\end{pmatrix}$.

18. Квадратните матрици $A_n=(a_{ij})$, $1\le i\le n$, $1\le j\le n$ са дефинирани с равенствата $a_{ij}=i-j^2$. Да се определи за кои стойности на $n\in\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ детерминантата на матрицата A_n е равна на 0.

19. В равнината спрямо декартова координатна система са дадени точките $A(4,0)$ и $B(0,3)$, както и елипсата $E\ :\ 12\,x^2+\ 16\,y^2=\ 7$. Да се намерят координатите на точката $C\in E$, за която лицето на ΔABC е възможно най-малко и да се пресметне това лице.

20. Кое е най-малкото естествено число n, за което сумата $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{30^k}{k!}-\frac{20^k}{(k-1)!}\right)$ е по-голяма от 10^{12}? А за кое n сумата става по-голяма от 10^{13}? Може ли за някое n сумата да стане по-голяма от 10^{14}?

21. Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x)=\begin{vmatrix}2 & x & x & x\\ x & 0 & x & x\\ x & x & 1 & x\\ x & x & x & 5\end{vmatrix}$ в интервала $[0,2015]$.

22. За кои стойности на реалния параметър m уравнението $(2-m)x^3-3mx^2-3mx+2-m=0$ има двукратен корен?

23. Да се докаже, че за всеки две положителни числа a и b е в сила неравенството $\sqrt[3]{4}\left(a^3+b^3\right)\geq 3a^2b.$

24. Да се намери най-голямото от числата

$$\sqrt{\frac{2}{2015}},\ \sqrt[3]{\frac{3}{2015}},\ \sqrt[4]{\frac{4}{2015}},\ \sqrt[5]{\frac{5}{2015}},\ \ldots,\ \sqrt[201520152015]{\frac{201520152015}{2015}}.$$

25. Да се пресметне границата $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}{1+\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{\left(1+\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2}{1+\sin\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\frac{\left(1+\cos\frac{n\pi}{n}\right)^2}{1+\sin\frac{n\pi}{n}}\right).$

26. Да се реши уравнението $\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{\pi}{12}$ за $x>\sqrt{2}$.

27. Да се пресметне дължината на дъгата от кривата $\ell:\begin{cases}x=\frac{2}{3}t^3+\frac{t^2}{2}\\ y=-\frac{4}{3}t^3+\frac{t^2}{2}\\ z=\frac{t^3}{3}+t^2\end{cases}$ за $t\in[0;1]$.

28. Да се пресметне лицето на фигурата, зададена с неравенствата $x^4+y^4\leq 1$ и $x^2\leq y$.

29. Да се намери лицето на фигурата, ограничена от кривата $y=\ln x$, допирателната към нея в точката $(e,1)$ и оста Ox.

30. Да се намери обемът на тялото, образувано при въртенето около оста Ox на фигурата, ограничена от линиите $y=e^{-2x}-1,\ y=e^{-x}+1$ и $x=0$.

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност с изключение на задачите, в които изрично е посочена желаната точност.