

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

ЧАСТ 1

1. Колко цифри има числото 2017^{2017} , записано в десетична бройна система?
2. Да се пресметне изразът $\sqrt{\binom{20}{17} + \binom{20}{16}}$ с точност до десетия знак след десетичната запетая.
3. Да се намерят рационалните корени на полинома $f(x) = 6x^4 - x^3 + 17x^2 - 3x - 3$.
4. Да се разложи на множители над полето \mathbb{Z}_5 полиномът $x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x - 3$.
5. За кои естествени числа $n < 200$ полиномът $x^{2n} + 16x^n + 8n$ може да се разложи на множители с цели коефициенти?
6. Дадени са квадратните матрици $A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$.
Да се пресметне $\det A_{2017}$.
7. Да се реши матричното уравнение $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 10 & 15 & 20 & 30 \end{pmatrix}$.
8. Да се пресметнат интегралите $\int \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$ и $\int_0^{2017} [\sqrt{x}] dx$, където $[\sqrt{x}]$ е най-голямото цяло число, ненадминаващо \sqrt{x} .
9. Нека $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+1}$. Да се пресметне $f''(1)$.
10. Да се реши неравенството $\ln \frac{1+x}{1-x} < x$.

11. Да се намерят екстремумите и да се начертае графиката на функцията $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

12. Да се реши в естествени числа уравнението $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

13. Числата от вида $M_n = 2^n - 1, n \in \mathbb{N}$, се наричат Мерсенови числа. Колко са простите Мерсенови числа за $n \leq 2017$?

14. Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена рекурентно с условията $a_1 = 2017$ и

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1, & \text{ако } a_n \text{ е нечетно;} \\ \frac{a_n}{2}, & \text{ако } a_n \text{ е четно.} \end{cases}$$

Да се намери най-малкото естествено число n , за което $a_n = 1$.

15. Да се намери уравнение на параболата, която пресича абсцисата в $x = 1$, ординатата в $y = -5$ и има допирателна с уравнение $y = -x - 5$ в точката $x = 0$.

16. Да се пресметне дължината на дъгата, определена от графиката на функцията $y = \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right)$ в интервала $1 \leq x \leq 2$.

17. Да се реши системата уравнения $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4xy(y^2 - 1) = 0 \end{cases}$ и решенията да се изобразят графично.

18. Да се определят координатите на средата на отсечката с краища пресечните точки на параболата $p: y = 2x^2 + 4x - 2$ и правата $l: y = x + 2$.

19. Да се реши уравнението: $\frac{x-2017}{2018} + \frac{x-2018}{2017} = \frac{2017}{x-2018} + \frac{2018}{x-2017}$.

20. Вярно ли е, че $\frac{1}{2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3^2}{4^3} + \dots + \frac{2016^{2015}}{2017^{2016}} > \pi$?