



**ПЪРВА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА
„АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“**

**ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ГАБРОВО
24-26. X. 2012 г.**

Задачи за група В

1. Да се пресметне стойността на израза $\sqrt[3]{\frac{x^2}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}}$ при $x = 2,3$ и $y = 1,2$.
2. Да се пресметне стойността на израза $x_2^5 - x_1^5$, където x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 2x - 11 = 0$ и $x_1 < x_2$.
3. Да се пресметне $\frac{(-\sqrt{3} + i)^{15}}{(1-i)^{24}}$.
4. Приведете в нормален вид полинома $(x-2)^9 - (x+5)^5$.
5. Разложете на множители с реални коефициенти полинома $x^8 - 16$.
6. Да се реши уравнението $32x^4 - 128x^3 + 114x^2 + 63x - 81 = 0$.
7. Да се реши неравенството $\sqrt{5-2x} < 6x-1$.
8. Да се определи дефиниционната област на функцията $f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x - 6}$.
9. Да се реши системата
$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$
10. Да се пресметне детерминантата
$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$
.
11. Да се реши уравнението
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & x & 4 \\ 5 & 6 & x \end{vmatrix} = 20$$
.
12. За кои стойности на a и c е вярно равенството $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 6 \\ c & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 6 \\ c & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$?
13. Да се начертае графиката на функцията $f(x) = x^2 + bx + c$, ако е известно, че минава през точките $A(2,4)$ и $B(5,1)$.
14. Да се пресметне $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$.
15. Да се намери производната на функцията $f(x) = e^{\sqrt{x}} \sin^2 x$.

16. Да се пресметне $f''\left(\frac{1}{4}\right)$, ако $f(x) = \arccos \sqrt{x}$.
17. Да се определят интервалите на растене и намаляване на функцията $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$.
18. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x) = -3x^4 + 20x^3 - 35x^2 + 24$.
19. Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$ в интервала $(0; +\infty)$.
20. Определете броя на положителните корени на уравнението $x^3 - 14x + 11 = 0$.
21. Да се намерят корените на уравнението $\sin 2x = x$.
22. За кои стойности на реалния параметър a уравнението $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = a$ има решение в множеството на реалните числа?
23. Да се пресметне $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$.
24. Да се пресметне $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx$.
25. Да се пресметне лицето на фигурата, заградена от графиките на функциите $f(x) = 3x - 4x^3$ и $g(x) = -x^3$ при $x \geq 0$.
26. Да се пресметне сумата $\frac{1^2}{2^3} + \frac{2^2}{3^3} + \dots + \frac{19^2}{20^3}$.
27. Намерете цяло положително число n , за което
- $$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{n.(n+2)} = \frac{3038623}{4054182}.$$
28. Да се пресметне сумата $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots$
29. Да се провери дали функцията $y(x) = e^x - 1$ е решение на уравнението
- $$y''(x) + \int_0^x e^{2(x-t)} y'(t) dt = e^{2x}.$$
30. Да се реши диференциалното уравнение $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$ при начални условия $y(0) = 3, y'(0) = 2$.

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност.