



СЕДМА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА  
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“  
ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ

26-28 ОКТОМВРИ 2018 г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

1. Коя е 2018-та цифра в десетичния запис на  $2018!$  и 2018-та цифра в десетичния запис на  $2018^{2018}$ ?
2. Да се опрости изразът  $2i(i-1) + (\sqrt{3+i})^3 + (1+i)(\overline{1+i})$ , където със  $\bar{z}$  е означено комплексно спрегнатото число на комплексното число  $z$ .
3. Да се докаже, че броят на простите числа от вида  $n^{18} + 2018$  за  $1 \leq n \leq 2018$  е просто число.
4. Да се намери най-големият общ делител на целите части на числата  $\sqrt{2018 + \sqrt[3]{2018}} + \sqrt[3]{2018 + \sqrt[4]{2018}} + \sqrt[4]{2018 + \sqrt[5]{2018}}$  и  $^{2018}\sqrt{2018!}$
5. Има ли цифра 1 в представянето на 2018 в троична бройна система?
6. Да се намери най-малката стойност на цялото число  $n$ , за която поне един от ненулевите коефициенти на някой от неразложимите множители (полиноми) на полинома  $x^n - 1$  е различен от  $\pm 1$ .
7. Да се намерят частното и остатъкът при делението на полиномите  $f(x) = 2x^6 + 3x^5 - x^4 + 2x + 3$  и  $g(x) = 5x^4 - x^3 + 7x + 4$  над полето  $\mathbb{Z}_{11}$ .
8. Да се намерят всички решения в естествени числа на диофантовото уравнение 
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{2}$$
9. Намерете броя на всички положителни целочислени корени на уравнението 
$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1$$
10. Дадена е функцията  $f(1) = 18, f(n) = f(n-1)^2 + 53n^5 - 2018, n > 1$ . Да се пресметнат  $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$ .
11. Да се намерят всички естествени числа  $m \leq 2018$  за които числото  $M = \frac{(m+3)^7+1}{3m}$  е цяло.
12. Да се намери сумата от кубовете на корените на уравнението  $x^8 - 2x^7 + 3x^6 + x^2 - 2x + 3 = 0$ .
13. Да се намерят всички диагонални матрици от трети ред, които анулират полинома 
$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$
14. Дадена е  $10 \times 10$  матрицата  $A = (a_{ij}), a_{ij} = \begin{cases} i+j-1, & \text{ако } i+j \leq 11 \\ 21-i-j, & \text{ако } i+j > 11 \end{cases}$ . Да се намерят характеристичните корени на матрицата  $A$  и да се пресметне нейната детерминанта.
15. Дадена е редицата  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$  при  $n \geq 4$ . Да се пресметне сумата на първите 25 члена на тази редица.
16. Да се реши уравнението  $\frac{1}{20}e^{20x} + 18 \cos(18x) = 20$ .
17. Да се намери лицето на фигурата, заградена от графиките на функциите  $y = \ln x$  и  $y = \ln^2 x$  между техните пресечни точки.



