Огнян Тодоров Касабов
Румен Костадинов Улучев

ФОРМУЛИ ПО ВИСША МАТЕМАТИКА

2020

ИЗПОЛЗВАНИ ОЗНАЧЕНИЯ

$=$	–	равно;
$\neq$	–	различно;
$\equiv$	–	съвпада;
$\sim$	–	подобно;
$\not\equiv$	–	не съвпада;
$\approx$	–	приблизително равно;
$>$	–	по-голямо;
$\geq$	–	по-голямо или равно;
$<$	–	по-малко;
$\leq$	–	по-малко или равно;
$\cong$	–	еднакво;
$\parallel$	–	успоредно, паралелно;
$\perp$	–	перпендикулярно, ортогонално;
$\sphericalangle$	–	ъгъл;
$\triangle$	–	триъгълник;
$^\circ$	–	градус;
$\overset{\frown}{}$	–	дъга;
$\overrightarrow{\ }$	–	лъч;
$\infty,\ +\infty,\ -\infty$	–	безкрайност, плюс и минус безкрайност;
$\lvert\ \rvert$	–	модул, абсолютна стойност;
$\mathbb{N}$	–	множеството на естествените числа;
$\mathbb{Z}$	–	множеството на целите числа;
$\mathbb{Q}$	–	множеството на рационалните числа;
$\mathbb{R}$	–	множеството на реалните числа;
$\mathbb{C}$	–	множеството на комплексните числа;
$\emptyset$	–	празното множество;
$\in$	–	принадлежи;
$\notin$	–	не принадлежи;
$\cap$	–	сечение;
$\cup$	–	обединение;
$\subset$	–	съдържа се;
$\times$	–	произведение;
$\sum$	–	сума;
$\Longrightarrow$	–	следва, следователно;
$\Longleftrightarrow$	–	равносилно, тогава и само тогава;
$\&,\ \wedge$	–	логическо „и“, конюнкция;
$\vee$	–	логическо „или“, дизюнкция;
$\forall$	–	за всяко;
$\exists$	–	съществува.

I. МНОЖЕСТВА, КОМБИНАТОРИКА, ТРИГОНОМЕТРИЯ

§1. Множества

Действия с множества:

- $A = \{a, b, \dots, n\}$ – множество A с елементи $a, b, \dots, n$;
- $x \in A$ – x е елемент на множеството A;
- $x \notin A$ – x не е елемент на множеството A;
- $A \subset B$ – множеството A се съдържа в множеството B,
  $x \in A \Longrightarrow x \in B$;
- $A \cup B$ – обединение на множествата A и B,
  $x \in A \cup B \iff x \in A$ или $x \in B$;
- $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ – обединение на множествата $A_1, A_2, \dots, A_n$,
  $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \iff x \in A_k$ за поне едно $k \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- $A \cap B$ – сечение на множествата A и B,
  $x \in A \cap B \iff x \in A$ и $x \in B$;
- $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ – сечение на множествата $A_1, A_2, \dots, A_n$,
  $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \iff x \in A_k$ за всяко $k \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- $A \setminus B$ – разлика на множествата A и B,
  $x \in A \setminus B \iff x \in A$ и $x \notin B$.

Числови множества:

- $\mathbb{N}$ – множеството на естествените числа,
  $x \in \mathbb{N} \iff x \in \{1, 2, \dots, n, \dots\}$;
- $\mathbb{Z}$ – множеството на целите числа,
  $x \in \mathbb{Z} \iff x \in \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$;
- $\mathbb{Q}$ – множеството на рационалните числа,
  $x \in \mathbb{Q} \iff x = \dfrac{p}{q}$, където $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$;
- $\mathbb{R}$ – множеството на реалните числа,
  $x \in \mathbb{R} \iff x$ може да се представи като крайна или безкрайна десетична дроб;

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – множеството на ирационалните числа,

  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \iff x \in \mathbb{R}$ и x не може да се представи нито като крайна, нито като безкрайна периодична десетична дроб,

  $\pi \approx 3.14159265358979323846\ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

  $e \approx 2.71828182845904523536\ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

- $\mathbb{C}$ – множеството на комплексните числа,

  $z \in \mathbb{C} \iff z = a + ib$, където $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ и $i = \sqrt{-1}$ е имагинерната единица;

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

§2. Комбинаторика. Нютонов бином

Факториел:

- $0! = 1$,

  $1! = 1$,

  $(n+1)! = (n+1)\,.\,n!$ за $n \in \mathbb{N}$,

  $n! = n(n-1)\ldots 2\,.\,1$ за $n \geq 2$.

Брой на пермутациите от n елемента:

- $P_n = n!$.

Брой на вариациите от n елемента k-ти клас:

- $V_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Брой на комбинациите от n елемента k-ти клас:

- $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k\,.\,(k-1)\,.\,2\,.\,1} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

Нютонов бином:

- $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$.

Свойства на биномните коефициенти:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

§3. Тригонометрия

Стойности на тригонометричните функции:

x (в градуси)	x (в радиани)	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$0°$	0	0	1	0	–
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
$180°$	π	0	-1	0	–

Мерки за ъгли:

- 1 радиан $= \dfrac{180°}{\pi} \approx 57° 17' 45''$;
- $1° = \dfrac{\pi}{180}$ радиана $\approx 0{,}017$.

Основни формули:

- $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$;
- $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$;
- $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$;
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ – основно тригонометрично тъждество.

Тригонометрични функции на противоположни ъгли, ъгли различаващи се с $\frac{\pi}{2}$ радиана и с π радиана:

- $\sin(-x) = -\sin x$, $\quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$;
- $\cos(-x) = \cos x$, $\quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$;
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, $\quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$;
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, $\quad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$;
- $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x$, $\quad \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x$;
- $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} x$, $\quad \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} x$;
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\quad \sin(x - \pi) = -\sin x$;
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\quad \cos(x - \pi) = -\cos x$;
- $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, $\quad \operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x$;
- $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$, $\quad \operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg} x$.

Тригонометрични функции на сбор и разлика:

- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, $\quad \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$;
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$;
- $\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \ \operatorname{tg} y}$, $\quad \operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \ \operatorname{tg} y}$;
- $\operatorname{ctg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \ \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x}$, $\quad \operatorname{ctg}(x - y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \ \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}$.

Формули за двойни и половинки ъгли:

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;
- $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, $\quad \operatorname{ctg} 2x = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$;
- $\sin x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, $\quad \cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$;
- $\sin \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$, $\quad \cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$;
- $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$, $\quad \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$.

Формули за понижаване на степента:

- $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$;
- $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Преобразуване на произведение:

- $\sin x\ \sin y = \dfrac{1}{2}\big[\cos(x-y) - \cos(x+y)\big]$;
- $\cos x\ \cos y = \dfrac{1}{2}\big[\cos(x-y) + \cos(x+y)\big]$;
- $\sin x\ \cos y = \dfrac{1}{2}\big[\sin(x+y) + \sin(x-y)\big]$.

Преобразуване на сбор и разлика:

- $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\ \cos\dfrac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\ \sin\dfrac{x-y}{2}$;
- $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\ \cos\dfrac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\ \sin\dfrac{x-y}{2}$;
- $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\ \cos y}$, $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\ \cos y}$;
- $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \dfrac{\sin(x+y)}{\sin x\ \sin y}$, $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \dfrac{\sin(y-x)}{\sin x\ \sin y}$.

II. АЛГЕБРА

§1. Детерминанти

Детерминанта от втори ред:

- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Детерминанта от трети ред:

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$

Детерминанта от n-ти ред:

- $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[k_1,k_2,\dots,k_n]} a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n},$

  където сумирането е по всички пермутации на числата $1, 2, \dots, n$, $[k_1, k_2, \dots, k_n]$ е броят на инверсиите в пермутацията $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Поддетерминанта на Δ, отговаряща на елемента a_{ij}:

- $\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$
- Δ_{ij} – получена след премахване на i-тия ред и j-тия стълб от Δ.

Адюнгирано количество на елемента a_{ij}:

- $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Развиване на Δ по i-тия ред:

- $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$

Развиване на Δ по j-тия стълб:

- $\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$

Свойства на детерминантите:

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0;$$
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

§2. Матрици

Матрица от тип $m \times n$:

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

  m – броят на редовете, n – броят на стълбовете.

Транспонирана на матрицата $\mathbf{A}$:

- $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Нулева матрица от тип $m \times n$:

- $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Матрица-ред и матрица-стълб:

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, $\qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Квадратна матрица от ред n (матрица с n реда и n стълба):

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Детерминанта на квадратна матрица:

- $\det \mathbf{A} = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Единична матрица от ред n:

- $\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; $\qquad \det \mathbf{E}_n = 1$.

Линейни действия с матрици. При

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } \lambda \in \mathbb{R}:$$

- $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$;
- $\lambda\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$;
- $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-1)\mathbf{B}$,

  $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$.

Произведение на матрици. При

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – от тип } m\times n \text{ и}$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} \text{ – от тип } n\times k:$$

- $\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}$ – от тип $m\times k$,

  $c_{ij}=\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}\ ,\quad i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,k.$

Ранг на матрица $\mathbf{A}$ от тип $m\times n$.

- $\mathbf{A}$ има ранг r, ако притежава ненулев минор от ред r и не притежава ненулев минор от ред $r+1$;
- $0\le r\le \min\{m,n\}$.

Свойства:

- $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;
- $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$;
- $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$;
- $1\,.\,\mathbf{A}=\mathbf{A}$;
- $(\lambda+\mu)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$;
- $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$;
- $\lambda(\mu\mathbf{A})=(\lambda\mu)\mathbf{A}$;
- $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$;
- $\mathbf{AE_n}=\mathbf{E_mA}=\mathbf{A}$;
- $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$;
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;
- $\lambda(\mathbf{AB})=(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$;
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}'$;
- $(\lambda\mathbf{A})'=\lambda\mathbf{A}'$;
- $(\mathbf{AB})'=\mathbf{B}'\mathbf{A}'$;
- $\big((\mathbf{A})'\big)'=\mathbf{A}$;
- $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ в общия случай.

§3. Обратна матрица

- Матрицата $\mathbf{A^{-1}}$ е обратна матрица на $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, ако $\mathbf{AA^{-1}}=\mathbf{A^{-1}A}=\mathbf{E_n}$;
- $\mathbf{A}$ има обратна $\iff |\mathbf{A}|\neq 0$;
- $\mathbf{A^{-1}}=\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Ортогонална матрица:

- $\mathbf{A}$ е ортогонална, ако $\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{A'}$;
- $\mathbf{A}$ е ортогонална $\iff \sum_{s=1}^{n} a_{is}a_{js} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Матрично уравнение:

- $\mathbf{AX} = \mathbf{B} \iff \mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}B}$,
  $\mathbf{A}$ – матрица от ред n, $|A| \neq 0$,
  $\mathbf{B}$ – матрица от тип $n \times m$,
  $\mathbf{X}$ – неизвестната матрица от тип $n \times m$.

§4. Системи линейни уравнения

Формули на Крамер:

- системата
  $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$
  има решение $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $\ldots$, $x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, където
  $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$
  Δ_k е получена от Δ със замяна на k-тия стълб със стълба от десните страни.

Метод на Гаус.

- Елементарни преобразувания върху системи:

  – умножаване двете страни на едно уравнение с число, различно от нула;

  – прибавяне към едно уравнение на системата друго уравнение, умножено с число;

  – сменяне местата на две уравнения.

- Чрез елементарни преобазувания последователно привеждаме линейната система в еквивалентни на нея системи, до получаването на система от вида:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \cdots + \alpha_{1k}x_k + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \cdots + \alpha_{2k}x_k + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \alpha_{33}x_3 + \cdots + \alpha_{3k}x_k + \cdots + \alpha_{3n}x_n = \beta_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{kk}x_k + \cdots + \alpha_{kn}x_n = \beta_k, \end{cases}$$

където $k \leq \min\{m, n\}$ и $\alpha_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$. При $k = n$ системата е триъгълна и се решава отзад-напред: от последното уравнение намираме x_n, от предпоследното намираме x_{n-1} и т.н. Накрая от първото уравнение намираме x_1.

При $k < n$ даваме произволни стойности на $x_{k+1}, \ldots, x_n$ и от последното уравнение намираме x_k, от предпоследното намираме x_{k-1} и т.н. Накрая от първото уравнение намираме x_1. Общото решение на системата зависи от $n - k$ параметъра.

На практика при решаване на системи линейни уравнения по метода на Гаус се работи с разширената матрица на системата и елементарните преобразувания се извършват над нея.

§5. Комплексни числа

Имагинерна единица:

- число i, такова че $i^2 = -1$.

Алгебричен вид:

- $z = a + ib, \;\; a, b \in \mathbb{R}, \;\; z \in \mathbb{C}$;
- $a = \operatorname{Re} z$ – реална част;
- $b = \operatorname{Im} z$ – имагинерна част;
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модул на $z = a + ib$;
- $\operatorname{Arg} z = \varphi$ – аргумент на $z = a + ib, \;\; \varphi \in [0, 2\pi)$,

  $\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}$;
- $\overline{z} = a - ib$ – комплексно спрегнато на $z = a + ib$.

Действия:

- $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$;
- $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$;
- $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$;
- $\dfrac{c + id}{a + ib} = \dfrac{(ac + bd) + i(ad - bc)}{a^2 + b^2}$.

Тригонометричен вид:

- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \ z \in \mathbb{C}$;
- $r = |z|$;
- $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Смяна от тригонометричен в алгебричен вид:

- $\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi, \end{cases}$
  $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = a + ib.$

Смяна от алгебричен в тригонометричен вид:

- $\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \end{cases}$
  $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$

Действия:

- $\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)\big(\rho(\cos\psi + i\sin\psi)\big) = r\rho\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big)$;
- $\dfrac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\rho(\cos\psi + i\sin\psi)} = \dfrac{r}{\rho}\big(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\big).$

Формула на Моавър:

- $\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$

Коренуване:

- $z = \sqrt[n]{\alpha} \iff z^n = \alpha,\ \ \alpha \in \mathbb{C}$;
- $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Формула на Ойлер:

- $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$

III. АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

§1. Вектори

Свойства:

- $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$;
- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$;
- $\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$;
- $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{o}$;
- $1\,.\,\mathbf{a}=\mathbf{a}$;
- $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$;
- $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$;
- $\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$,

където $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$ са вектори, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ и $\mathbf{o}$ е нулевият вектор.

Линейна зависимост.

- $\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a_n}$ – линейно зависими вектори, ако $\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}+\cdots+\lambda_n\mathbf{a_n}=\mathbf{o}$ и поне едно $\lambda_i\neq 0$;
- $\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\ldots,\mathbf{a_n}$ – линейно независими вектори, ако $\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}+\cdots+\lambda_n\mathbf{a_n}=\mathbf{o}$ единствено за $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

Колинеарност:

- $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – колинеарни $\iff$ $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – линейно зависими;
- при $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$ векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са колинеарни $\iff$ $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$.

Компланарност:

- $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ – компланарни $\iff$ $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ – линейно зависими;
- при $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – неколинеарни, векторите $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ – компланарни $\iff$ $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$.

§2. Скаларно произведение

Определение.

- $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$, където $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, при $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{o}$.
- $\mathbf{ab} = 0$ при $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ или $\mathbf{b} = \mathbf{o}$.

Свойства:

- $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$;
- $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$;
- $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda\mathbf{ab}$;
- $\mathbf{aa} \geq 0$, като $\mathbf{aa} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Скаларен квадрат:

- $\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa}$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$.

Ортогонални вектори:

- $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{ab} = 0$.

За вектори $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ и $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ в равнината:

- $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2$;
- $\mathbf{a}^2 = a_1^2 + a_2^2$;
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$;
- $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$;
- $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

За вектори $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ в пространството:

- $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;
- $\mathbf{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$;
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;
- $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$;
- $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.
- $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, където
  $\cos\alpha = \dfrac{a_1}{|\mathbf{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_2}{|\mathbf{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_3}{|\mathbf{a}|}$ – посочни (директорни) косинуси на $\mathbf{a}$.

§3. Векторно произведение

Определение.

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, където
  $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$,
  $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ образуват дясна тройка,
  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\varphi$, като $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
  при неколинеарни $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}$ при колинеарни $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Свойства:

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$;
- $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$;
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

За дясна ортонормирана тройка вектори $\{\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}\}$ имаме:

- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$;
- $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$;
- $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$;
- $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{o}$.

За вектори $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ в пространството:

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$.
- $\sin\varphi = \dfrac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$.
- Лице на успоредник, построен върху векторите $\mathbf{a},\ \mathbf{b}$:
  $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.
- Лице на триъгълник, построен върху векторите $\mathbf{a},\ \mathbf{b}$:
  $S = \dfrac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.
- Формула на Лагранж: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{ab})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$.

§4. Смесено произведение

Определение:

- $\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$.

Свойства:

- $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba}$;
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{cd} = \mathbf{acd} + \mathbf{bcd}$;
- $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{bc} = \lambda\mathbf{abc}$.

За вектори $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ и $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ в пространството:

- $\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$;
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – компланарни $\iff \mathbf{abc} = 0$.
- Обем на паралелепипед, построен върху векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:
  $V = |\mathbf{abc}|$.
- Обем на тетраедър, построен върху векторите $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:
  $V = \frac{1}{6}|\mathbf{abc}|$.

§5. Координатни системи

Декартова координатна система в равнината:

- Точка O – начало, $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ – ортонормиран базис.
- $\overrightarrow{OA} = (x_A; y_A)$ ако $\overrightarrow{OA} = x_A\mathbf{e_1} + y_A\mathbf{e_2}$,
  $(x_A; y_A)$ – координати на вектора $\overrightarrow{OA}$ и координати на точка A.
- Разстояние между точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$:
  $|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$,
  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Полярна координатна система в равнината:

- $(\rho; \varphi)$ – полярни координати на точка A,
  $\rho = |OA|$, $\rho \geq 0$,
  $\varphi = \sphericalangle(Ox^{\rightarrow}, \overrightarrow{OA})$, $\varphi \in [0; 2\pi)$,
  $(x; y)$ – Декартови координати на точка A.

- Смяна на Декартови в полярни координати:
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$
- Смяна на полярни в Декартови координати:
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \qquad (\varphi = \dfrac{\pi}{2} \text{ при } x = 0). \end{cases}$$

Декартова координатна система в пространството:

- Точка O – начало, $\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \mathbf{e_3}$ – ортонормиран базис.
- $\overrightarrow{OA} = (x_A; y_A; z_A)$ ако $\overrightarrow{OA} = x_A\mathbf{e_1} + y_A\mathbf{e_2} + z_A\mathbf{e_3}$,
  $(x_A; y_A; z_A)$ – координати на $\overrightarrow{OA}$ и координати на точка A.
- Разстояние между точки $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$:
  $|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$,
  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Сферична координатна система в пространството:

- $(\rho; \varphi; \theta)$ – сферични координати на точка A,
  $\rho = |OA|, \qquad \rho \geq 0,$
  $\varphi = \sphericalangle(Ox^{\rightarrow}, \overrightarrow{OA'}), \qquad \varphi \in [0; 2\pi),$
  $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{OA}, Oxy), \qquad \theta \in \big[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\big],$
  A' – ортогонална проекция на точка A върху равнината Oxy,
  $(x; y; z)$ – Декартови координати на точка A.
- Смяна на Декартови в сферични координати:
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta. \end{cases}$$
- Смяна на сферични в Декартови координати:
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \qquad (\varphi = \dfrac{\pi}{2} \text{ при } x = 0), \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (\theta = \dfrac{\pi}{2} \text{ при } x^2+y^2 = 0). \end{cases}$$

Цилиндрична координатна система в пространството:

- $(\rho;\varphi;z)$ – цилиндрични координати на точка A,
  $\rho = |OA|, \qquad \rho \geq 0,$
  $\varphi = \sphericalangle(Ox^{\rightarrow}, \overrightarrow{OA}), \qquad \varphi \in [0;2\pi),$
  A' – ортогонална проекция на точка A върху равнината Oxy,
  $(x;y;z)$ – Декартови координати на точка A.
- Смяна на Декартови в цилиндрични координати:
  $$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$
- Смяна на цилиндрични в Декартови координати:
  $$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \qquad (\varphi = \dfrac{\pi}{2} \text{ при } x = 0), \\ z = z. \end{cases}$$

§6. Уравнения на права в равнината

Общо уравнение на права g:

- $g : Ax + By + C = 0$, където $A \neq 0$ или $B \neq 0$.

Уравнение на права g, $g \perp \mathbf{n}(A,B)$ и $M_0(x_0,y_0) \in g$:

- $g : A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$.

Векторно параметрично уравнение на права g, $g \| \mathbf{p}$ и $M_0(x_0,y_0) \in g$:

- $g : \overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{p}, \ t \in \mathbb{R}$.

Уравнение на права g, $g\|\mathbf{p}(\lambda,\mu)$ и $M_0(x_0,y_0) \in g$:

- $g : \dfrac{x-x_0}{\lambda} = \dfrac{y-y_0}{\mu}$.

Параметрични уравнения на права g, $g\|\mathbf{p}(\lambda,\mu)$ и $M_0(x_0,y_0) \in g$:

- $g : \begin{cases} x = x_0 + \lambda t, \\ y = y_0 + \mu t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$.

Уравнение на права g, $M_0(x_0,y_0) \in g$ и $M_1(x_1,y_1) \in g$:

- $g : \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}; \qquad g : \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix} = 0; \qquad g : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Декартово уравнение на права:

- $g : y = kx + b$,
  $k = \operatorname{tg}\varphi$ – ъглов коефициент, $\quad \varphi = \sphericalangle(Ox, g), \quad \varphi \in \big(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\big)$,
  b – отрез от оста Oy до началото $O(0,0)$, точка $B(0,b) = g \cap Oy$.

Отрезово уравнение на права:

- $g : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$,
  a – отрез от оста Ox до началото $O(0,0)$, точка $A(a,0) = g \cap Ox$,
  b – отрез от оста Oy до началото $O(0,0)$, точка $B(0,b) = g \cap Oy$.

Нормално уравнение на права:

- $g : x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$,
  $\alpha = \sphericalangle(Ox, g), \qquad \alpha \in [0; 2\pi)$,
  p – разстояние от точка $O(0,0)$ до g;
- $g : \dfrac{Ax + By + C}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$,
  $\varepsilon = +1$ при $C < 0$,
  $\varepsilon = -1$ при $C > 0$.

Разстояние (абсолютно) от точка $M(x_0, y_0)$ до права $g : Ax + By + C = 0$:

- $|\delta| = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Ориентирано разстояние от точка $M(x_0, y_0)$ до права $g : Ax + By + C = 0$:

- $\delta = \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2}}$,
  $\delta > 0 \iff M_0$ и O са в различни полуравнини относно g,
  $\delta < 0 \iff M_0$ и O са в една полуравнина относно g.

Ъгъл между две прави $g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $g_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

- $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \qquad \varphi = \sphericalangle(g_1, g_2)$.

Ъгъл между две прави $g_1 : y = k_1x + b_1$ и $g_2 : y = k_2x + b_2$:

- $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}, \quad \varphi = \sphericalangle(g_1, g_2)$ – ъгъл между g_1 и g_2.

Взаимни положения на две прави $g_1 : A_1x+B_1y+C_1 = 0$ и $g_2 : A_2x+B_2y+C_2 = 0$:

- $g_1 \perp g_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;
- g_1 пресича $g_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$;
- $g_1 \| g_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$;
- $g_1 \equiv g_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Взаимни положения на две прави $g_1 : y = k_1x + b_1$ и $g_2 : y = k_2x + b_2$:

- $g_1 \perp g_2 \iff k_1k_2 + 1 = 0$;
- $g_1 \| g_2 \iff k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$;
- $g_1 \equiv g_2 \iff k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$.

§7. Уравнения на равнина

Общо уравнение на равнина ρ:

- $\rho : Ax + By + Cz + D = 0$, където $A \neq 0$, $B \neq 0$ или $C \neq 0$.

Уравнение на равнина ρ, $\rho \perp \mathbf{n}(A, B, C)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \rho$:

- $\rho : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Отрезово уравнение на равнина:

- $\rho : \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$,
  a – отрез от оста Ox до началото $O(0, 0, 0)$, точка $A(a, 0, 0) = \rho \cap Ox$,
  b – отрез от оста Oy до началото $O(0, 0, 0)$, точка $B(0, b, 0) = g \cap Oy$,
  c – отрез от оста Oz до началото $O(0, 0, 0)$, точка $C(0, 0, c) = g \cap Oz$.

Уравнение на равнина ρ, $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \rho$, $i = 0, 1, 2$:

- $\rho : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$;
- $\rho : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Нормално уравнение на равнина:

- $\rho : x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$,
  $\alpha = \sphericalangle(Ox, \mathbf{n}),\ \ \beta = \sphericalangle(Oy, \mathbf{n}),\ \ \gamma = \sphericalangle(Oz, \mathbf{n}),$
  p – разстояние от точка $O(0,0,0)$ до ρ;
- $\rho : \dfrac{Ax + By + Cz + D}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$,
  $\varepsilon = +1$ при $D < 0$,
  $\varepsilon = -1$ при $D > 0$.

Разстояние от точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до равнина $\rho : Ax + By + Cz + D = 0$:

- $|\delta| = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Ориентирано разстояние от точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до равнина $\rho : Ax+By+Cz+D = 0$:

- $\delta = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$,
  $\delta > 0 \iff M_0$ и O са в различни полупространства относно ρ,
  $\delta < 0 \iff M_0$ и O са в едно полупространство относно ρ.

Взаимни положения на две равнини $\rho_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и
$\rho_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

- $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$,
  $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2})$ – ъгъл между равнините ρ_1 и ρ_2;
- $\rho_1 \| \rho_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$;
- $\rho_1 \equiv \rho_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

Векторно параметрично уравнение на равнина $\rho,\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in \rho,\ \rho\|\mathbf{p_1}$ и $\rho\|\mathbf{p_2}$:

- $\overrightarrow{M_0M} = s\,\mathbf{p_1} + t\,\mathbf{p_2}, \quad s, t \in \mathbb{R}$.

Параметрични уравнения на равнина $\rho,\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in \rho,\ \rho\|\mathbf{p_1}(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $\rho\|\mathbf{p_2}(\lambda_2, \mu_2, \nu_2$

- $\begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 s + \lambda_2 t, \\ y = y_0 + \mu_1 s + \mu_2 t, \\ z = z_0 + \nu_1 s + \nu_2 t, \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}$.

Общо уравнение на равнина $\rho,\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in \rho,\ \rho\|\mathbf{p_1}(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ и $\rho\|\mathbf{p_2}(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$:

- $(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1)(x - x_0) + (\nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1)(y - y_0) + (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(z - z_0) = 0$;
- $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} = 0$.

§8. Уравнения на права в пространството

Векторно параметрично уравнение на права ℓ, $\ell \| \mathbf{p}$ и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \ell$:

- $\ell : \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\mathbf{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Параметрични уравнения на права ℓ, $\ell \| \mathbf{p}(\lambda, \mu, \nu)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \ell$:

- $\ell : \begin{cases} x = x_0 + \lambda t, \\ y = y_0 + \mu t, \\ z = z_0 + \nu t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Канонично уравнение на права ℓ, $\ell \| \mathbf{p}(\lambda, \mu, \nu)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \ell$:

- $\ell : \dfrac{x - x_0}{\lambda} = \dfrac{y - y_0}{\mu} = \dfrac{z - z_0}{\nu}.$

Общо уравнение на права ℓ, $\ell \subset \alpha$ и $\ell \subset \beta$:

- $\ell : \begin{cases} \alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$

§9. Линии от втора степен

Общ вид на уравнение на линия от втора степен:

- $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$
  където $A \neq 0$, $B \neq 0$ или $C \neq 0$.

Окръжност с център точка $C(\alpha, \beta)$ и радиус R:

- $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ – нормално уравнение;
- $\begin{cases} x = \alpha + R\cos\varphi, \\ y = \beta + R\sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$ – параметрични уравнения;
- $x^2 + y^2 = R^2$ – канонично уравнение, при $C(\alpha, \beta) \equiv O(0, 0)$.

Елипса:

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – канонично уравнение, при $a > b$:
  a – голяма полуос,
  b – малка полуос,
  $F_1(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ и $F_2(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ – фокуси,
  $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ за всяка точка M от елипсата;

- $\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi)$ – параметрични уравнения;
- $\rho = \dfrac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$ – полярно уравнение.

Хипербола:

- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – канонично уравнение, при $a > b$:
  a – реална полуос,
  b – имагинерна полуос,
  $F_1(\sqrt{a^2+b^2}, 0), F_2(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ – фокуси,
  $\big||F_1M| - |F_2M|\big| = 2a$ за всяка точка M от хиперболата,
  $d_1 : x = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $d_2 : x = -\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ – директриси,
  $g_1 : y = \dfrac{b}{a}x$ и $g_2 : y = -\dfrac{b}{a}x$ – асимптоти;
- $\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,\varphi, \\ y = b\,\mathrm{sh}\,\varphi, \end{cases} \qquad \varphi \in (-\infty, \infty)$ – параметрични уравнения,
- $\rho = \dfrac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$ – полярно уравнение.

Парабола:

- $y^2 = 2px$ – канонично уравнение, при $p > 0$:
  $F(\dfrac{p}{2}, 0)$ – фокус,
  $d : x = -\dfrac{p}{2}$ – директриса;
- $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p}, \\ y = t, \end{cases} \qquad t \in (-\infty, \infty)$ – параметрични уравнения;
- $\rho = \dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}, \quad \varphi \in [\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ – полярно уравнение.

§10. Повърхнини от втора степен

Общ вид на уравнение на повърхнина от втора степен:

- $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$.

Сфера с център точка $C(\alpha, \beta, \gamma)$ и радиус R:

- $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2$.

Канонично уравнение на елипсоид:

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Канонично уравнение на хиперболоид с една повърхнина:

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Канонично уравнение на двоен хиперболоид:

- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Канонично уравнение на елиптичен параболоид:

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

Канонично уравнение на хиперболичен параболоид:

- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

Канонично уравнение на конус от втора степен:

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Канонично уравнение на кръгов цилиндър:

- $x^2 + y^2 = R^2$.

Канонично уравнение на елиптичен цилиндър:

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Канонично уравнение на хиперболичен цилиндър:

- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Канонично уравнение на параболичен цилиндър:

- $y^2 = 2px$.

IV. ФУНКЦИИ НА ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

§1. Граница на редица от реални числа

Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a \quad (\lambda \in \mathbb{R})$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b} \quad (b_n \neq 0 \text{ и } b \neq 0)$.

Основни граници:

- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0 \quad (p > 0)$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q} = \begin{cases} 0, & p < q, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q, \\ \infty, & p > q, \end{cases} \quad (a_0 \neq 0 \text{ и } b_0 \neq 0)$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

§2. Граница на функция

Ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то

- $\lim\limits_{x\to x_0} \big[f(x) \pm g(x)\big] = A \pm B$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \big[\lambda f(x)\big] = \lambda A \quad (\lambda \in \mathbb{R})$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \big[f(x) g(x)\big] = AB$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$.

Основни граници:

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0 \quad (p > 0)$;
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0x^q + b_1x^{q-1} + \cdots + b_q} = \begin{cases} 0, & p < q, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q, \\ \infty, & p > q, \end{cases} \quad (a_0 \neq 0 \text{ и } b_0 \neq 0)$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{t\to0}(1+t)^{1/t} = e$;
- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{t}{\sin t} = 1$.

§3. Производна и диференциал на функция

Производна на $f(x)$ в x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ .$$

Геометричен смисъл: Ако $g : y = kx + b$ е допирателната към графиката на $f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$, то ъгловият коефициент на g е $k = f'(x_0)$.

Правила за диференциране:

- $\big[f(x) \pm g(x)\big]' = f'(x) \pm g'(x)$;
- $\big[\lambda f(x)\big]' = \lambda f'(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$;
- $\big[f(x)g(x)\big]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
- $\Big(\dfrac{f(x)}{g(x)}\Big)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$;
- $\big[f(\varphi(t))\big]' = f'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.

Производни от по-висок ред:

- $f''(x) = [f'(x)]', \quad f'''(x) = [f''(x)]', \quad \ldots \quad f^{(n)} = \big[f^{(n-1)}\big]'$.

Диференциал на функция:

- $df(x) = f'(x)dx, \qquad dy = y'dx \quad (y = y(x))$.

Свойства на диференциала:

- $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}, \qquad y' = \dfrac{dy}{dx} \quad (y = y(x))$;
- $d(Cf) = C\,df \quad (C = const.)$;
- $d(f \pm g) = df \pm dg$;
- $d(fg) = g\,df + f dg$;
- $d\Big(\dfrac{f}{g}\Big) = \dfrac{g\,df - f dg}{g^2}$;
- $df(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\,d\varphi(x)$.

Диференциали от по-висок ред:

- $d^2 f = d(df), \quad d^3 f = d(d^2 f), \quad \ldots \quad d^n f = d(d^{n-1} f)$.

§4. Производни на основните елементарни функции

- $C' = 0 \quad (C = const.)$;
- $(x^a)' = ax^{a-1}$;
- $(e^x)' = e^x$;
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
- $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0\ ,\ a \neq 1)$;
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
- $(\sin x)' = \cos x$;
- $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$;

- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
- $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
- $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
- $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

§5. Формули и теореми

Формула на Лайбниц:

$$\big[f(x)\,g(x)\big]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\,g^{(k)}(x).$$

Теорема на Лагранж:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \quad \xi \in (a,b).$$

Теорема на Коши:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (a,b).$$

Правило на Лопитал:

- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \implies \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \implies \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Формула на Тейлър:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1},$$

където ξ е между x и a;

- $p(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$ – полином на Тейлър;
- $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ – остатъчен член.

Формула на Маклорен:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1},$$

където ξ е между 0 и x.

§6. Монотонност на функция. Екстремум

Условия за монотонност:

- $f(x)$ – растяща $\implies f'(x) \geq 0$;
- $f(x)$ – намаляваща $\implies f'(x) \leq 0$;
- $f'(x) > 0 \implies f(x)$ – строго растяща;
- $f'(x) < 0 \implies f(x)$ – строго намаляваща.

Необходимо условие за екстремум:

- $f(x)$ има локален екстремум в $x_0 \implies f'(x_0) = 0$.

Достатъчни условия за локален екстремум:

I. Ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, то

- $f(x)$ има локален минимум в x_0 при $f''(x_0) > 0$;
- $f(x)$ има локален максимум в x_0 при $f''(x_0) < 0$.

II. Ако $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то

- $f(x)$ има локален минимум в x_0 при $f^{(n)}(x_0) > 0$ и n четно;
- $f(x)$ има локален максимум в x_0 при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и n четно;
- $f(x)$ няма локален екстремум в x_0 при n нечетно.

§7. Изпъкналост, вдлъбнатост, инфлексия, асимптоти

Условия за изпъкналост (вдлъбнатост):

- $f''(x) > 0 \implies f(x)$ е изпъкнала;
- $f''(x) < 0 \implies f(x)$ е вдлъбната.

Условия за инфлексия:

- $f''(x_0) = 0$ и $f'''(x_0) \neq 0 \implies f(x)$ има инфлексия в x_0;
- $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ и n е нечетно $\implies$ $f(x)$ има инфлексия в x_0.

Асимптоти:

- $f(x)$ има вертикална асимптота $g : x = a$ при $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$;
- $f(x)$ има невертикална (наклонена или хоризонтална) асимптота $g : y = kx + b$ при $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - kx\big)$.

V. НЕОПРЕДЕЛЕН И ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

§1. Неопределен интеграл

Примитивна на функция:

- $F(x)$ е примитивна на $f(x)$, ако $F'(x) = f(x)$.

Неопределен интеграл от $f(x)$:

- $\int f(x)\,dx = F(x) + C\ , \quad C \in \mathbb{R}$,
  $F(x)$ – примитивна на $f(x)$.

Свойства:

- $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$;
- $\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Таблица с основни интеграли:

- $\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C\ , \quad a \neq -1$;
- $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
- $\int e^x\,dx = e^x + C$;
- $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$;
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;
- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;
- $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
- $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;
- $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$;

- $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C;$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$
- ако $I_n = \int \dfrac{dx}{(a^2+x^2)^n}$, то

  $I_1 = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C,$

  $I_n = \dfrac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1} + \dfrac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}}, \quad n = 2, 3, \ldots .$

Внасяне под диференциала:

- $\int f(x)g'(x)\,dx = \int f(x)\,dg(x);$
- $\int f(x)\,dx = F(x) + C \implies \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C.$

Интегриране по части:

- $\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x).$

Интегриране чрез субституция:

- $\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \Phi(t) + C \implies \int f(x)\,dx = \Phi(\psi(x)) + C,$
  $t = \psi(x)$ е обратната на $x = \varphi(t)$.

§2. Интегриране на рационални функции

Елементарни дроби:

- $\dfrac{A}{(x-a)^m};$
- $\dfrac{Ax+B}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^m}, \quad \beta \neq 0.$

Интегриране на елементарни дроби:

- $\int \dfrac{A}{(x-a)^m}\,dx = \begin{cases} A\ln|x-a| + C, & m = 1, \\ \dfrac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C, & m = 2, 3, \ldots . \end{cases}$

- $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^m}\,dt = M\int \frac{t}{(t^2+\beta^2)^m}dt + (N+\alpha M)\int \frac{dt}{(t^2+\beta^2)^m}, \quad t = x-\alpha,$

  $$\int \frac{t}{[t^2+\beta^2]^m}\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln(t^2+\beta^2)+C, & m=1, \\ \dfrac{1}{2(1-m)(t^2+\beta^2)^{m-1}}+C, & m=2,3,\dots\ . \end{cases}$$

Интеграл от рационална функция:

- $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$

  $P(x)$ и $Q(x)$ – полиноми.

Разлагане на рационална функция в сума от елементарни дроби:

- $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{k}\frac{A_j}{(x-a)^j}+\dots+\sum_{j=1}^{m}\frac{B_j}{(x-b)^j}+$$
  $$+\sum_{j=1}^{r}\frac{M_jx+N_j}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^j}+\dots+\sum_{j=1}^{s}\frac{U_jx+V_j}{\left[(x-\gamma)^2+\delta^2\right]^j},$$
  $P(x)$ и $Q(x)$ – полиноми,
  $\deg P(x) < \deg Q(x)$,
  $Q(x) = (x-a)^k\dots(x-b)^m\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^r\dots\left[(x-\gamma)^2+\delta^2\right]^s$.

§3. Интегриране на ирационални функции

Интеграл от вида:

$$\int R(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}})dx,$$

R – рационална функция, $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$, $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{N}$.

- $x = t^m$, $m = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_n)$.

Интеграл от вида:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx,$$

R – рационална функция, $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$, $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{N}$, $ab_1 - ba_1 \neq 0$:

- $\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1} = t^m$, $m = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_n)$,
  $x = \dfrac{b_1t^m-b}{a-a_1t^m}$, $\qquad dx = \dfrac{ab_1-ba_1}{(a-a_1t^m)^2}\,mt^{m-1}\,dt.$

Интеграл от вида:

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,dx,$$

R - рационална функция, $a \neq 0$.

Субституции на Ойлер:

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x \pm t$ при $a > 0$;
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$ при $c > 0$;
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)t$ при $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Интеграл от биномен диференциал:

$$I = \int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}\,dx,$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, $\beta \neq 0$.

Субституции:

- $x = t^n$, $n = $ НОК(знаменателите на α и β), при $\gamma \in \mathbb{Z}$;
- $a + bx^{\beta} = t^n$, n – знаменателят на γ, при $\dfrac{\alpha+1}{\beta} \in \mathbb{Z}$;
- $ax^{-\beta} + b = t^n$, n – знаменателят на γ, при $\dfrac{\alpha+1}{\beta} + \gamma \in \mathbb{Z}$.

§4. Интегриране на трансцендентни функции

Интеграл от вида:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

R – рационална функция.

Субституции:

- $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ – универсална субституция,

  $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\quad dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$;
- $t = \cos x$ при $R(-u, v) = -R(u, v)$;
- $t = \sin x$ при $R(u, -v) = -R(u, v)$;
- $t = \operatorname{tg} x$ при $R(u, v) = R(-u, -v)$.

Интеграл от вида:

$$\int \sin px \sin qx\, dx\ ,\ \int \cos px \cos qx\, dx\ ,\ \int \sin px \cos qx\, dx.$$

Прилагат се формулите:

- $\sin px \sin qx = \frac{1}{2}\big[\cos(p-q)x - \cos(p+q)x\big]$;
- $\cos px \cos qx = \frac{1}{2}\big[\cos(p-q)x + \cos(p+q)x\big]$;
- $\sin px \cos qx = \frac{1}{2}\big[\sin(p+q)x + \sin(p-q)x\big]$.

Интеграл от вида:

$$\int \sin^p x\ \cos^q x\, dx,$$

$p, q \in \mathbb{Q}$.

Субституции:

- $t = \sin x$;
- $t = \cos x$.

§5. Определен интеграл

Определен интеграл от $f(x)$ в $[a, b]$:

- $\int_a^b f(x)\, dx$.

Свойства:

- $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(u)\, du$;
- $\int_a^b Af(x)\, dx = A\int_a^b f(x)\, dx,\ \ A = const.$;
- $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$;
- $f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x)\, dx \geq 0$;
- $f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$;
- $\Big|\int_a^b f(x)\, dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$;

- $\int_a^s f(x)\,dx + \int_s^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \quad s \in [a,b];$
- $m \le f(x) \le M \implies \int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)\ , \ \ \mu \in [m,M].$

Формула на Лайбниц-Нютон:

- $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad F'(x) = f(x).$

Интегриране по части:

- $\int_a^b f(x)\,dg(x) = \big(f(x)g(x)\big)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x).$

Интегриране чрез субституция:

- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \quad \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b.$

§6. Приложения на определения интеграл

Лице на криволинеен трапец:

- $\sigma(S) = \int_a^b f(x)\,dx,$
  S – криволинеен трапец с граници:
  оста Ox, правите $x = a$ и $x = b$, графиката на $f(x)$ $(f(x) \ge 0)$.

Дължина на равнинна линия:

- $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx,$
  $\gamma : y = f(x), \quad x \in [a,b];$
- $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2}\,dt,$
  $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha,\beta].$

Лице на ротационна повърхнина и обем на ротационно тяло:

- $\sigma(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx,$
  S – получена от завъртането на $\gamma : y = f(x), \quad x \in [a,b]$, около Ox $(f(x) \ge 0)$;
- $V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx,$
  T – тялото, ограничено от повърхнината S и равнините с уравнения $x = a$ и $x = b$.

§7. Несобствен интеграл

Интеграл над безкраен интервал:

- $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx,$
  сходящ, ако границата съществува,
  разходящ, ако границата не съществува;
- $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx;$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$

Признак за сходимост (разходимост):

- $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ – сходящ, $0 \le f(x) \le g(x) \implies \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – сходящ;
- $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – разходящ, $0 \le f(x) \le g(x) \implies \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ – разходящ.

Основен пример:

- $\int_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$ – $\begin{cases} \text{сходящ при } p > 1, \\ \text{разходящ при } p \le 1, \end{cases}$ $(a > 0).$

Интеграл от неограничена функция:

- $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx,$
  $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty,$
  сходящ, ако границата съществува,
  разходящ, ако границата не съществува.
- $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{s\to b^-} \int_a^s f(x)\,dx,$
  $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty,$
  сходящ, ако границата съществува,
  разходящ, ако границата не съществува.

Признак за сходимост (разходимост):

- $\int_a^b g(x)\,dx$ – сходящ, $0 \le f(x) \le g(x) \implies \int_a^b f(x)\,dx$ – сходящ;

- $\int_a^b f(x)\,dx$ – разходящ, $0 \le f(x) \le g(x) \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ – разходящ.

Основен пример:

- $\int_0^b \frac{dx}{x^p}$ – $\begin{cases} \text{разходящ при } p \ge 1, \\ \text{сходящ при } p < 1. \end{cases}$

Абсолютна сходимост:

- $\int_a^b f(x)\,dx$ – абсолютно сходящ, ако $\int_a^b |f(x)|\,dx$ – сходящ;
- $\int_a^b f(x)\,dx$ – абсолютно сходящ $\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ – сходящ.

§8. Интеграли, зависещи от параметър

Интеграл, зависещ от параметър:

- $F(p) = \int_a^b f(x,p)\,dx$;
- $G(p) = \int_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\,dx$.

Диференциране:

- $F'(p) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\,dx$;
- $G'(p) = \int_{a(p)}^{b(p)} \frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\,dx + f(b(p),p)\,b'(p) - f(a(p),p)\,a'(p)$.

VI. ЧИСЛОВИ И ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДОВЕ

§1. Числови редове

Числов ред:

- $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;
- $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ – n-та частична (парциална) сума на реда;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходящ, ако съществува $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – сума на реда,

  $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – разходящ, ако $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не съществува.

Свойства:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходящ $\implies \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Признак за сравняване на редове:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ – сходящ, $0 \le u_n \le v_n \ \forall\ n \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходящ;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – разходящ, $0 \le u_n \le v_n \ \forall\ n \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ – разходящ.

Признак на Даламбер:

$u_n > 0 \ \forall\ n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$,

- $\ell < 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходящ;
- $\ell > 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – разходящ.

Признак на Коши:

$u_n \geq 0 \ \forall \ n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$,

- $\ell < 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходящ;
- $\ell > 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – разходящ.

Признак на Раабе-Дюамел:

$u_n > 0 \ \forall \ n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big) = \ell$,

- $\ell > 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходящ;
- $\ell < 1 \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – разходящ.

Интегрален признак на Коши:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ са едновременно сходящи (разходящи), $f(x)$ – неотрицателна и намаляваща в $[1, +\infty)$.

Алтернативен ред:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ при $u_n > 0 \ \forall n$.

Признак на Лайбниц.

$u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \cdots > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ – сходящ;
- $S \leq u_1$.

Абсолютна сходимост:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – абсолютно сходящ, ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ – сходящ,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – абсолютно сходящ $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – сходящ.

§2. Функционални редове

Функционален ред:

- $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$;
- x_0 – точка на сходимост, ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ е сходящ числов ред;
- област на сходимост – множеството от точките на сходимост;
- $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$ – парциална сума;
- $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ – сума на реда.

Равномерна сходимост:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – равномерно сходящ в I, ако
  $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0$ така че $n > n_0$ и $x \in I \implies |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Нормална сходимост:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – нормално сходящ, ако съществува сходящ числов ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, така че $|f_n(x)| \le a_n,\ n = 1, 2, \ldots$.

Признак на Вайерщрас:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – нормално сходящ $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – равномерно сходящ.

Свойства на равномерно сходящи редове от непрекъснати функции:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – равномерно сходящ, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$,

- $S(x)$ – непрекъсната;
- $\int\limits_a^x f_1(t)\,dt + \int\limits_a^x f_2(t)\,dt + \cdots + \int\limits_a^x f_n(t)\,dt + \cdots = \int\limits_a^x S(t)\,dt$;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ – равномерно сходящ $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = S'(x)$.

§3. Степенни редове

Степенен ред:

- $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ или $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$;
- $a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \cdots + a_n (x-c)^n + \cdots$ или $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$.

Теорема на Абел:

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – сходящ за $x = x_0 \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – абсолютно сходящ $\forall x \in (-|x_0|, |x_0|)$;
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – разходящ за $x = x_1 \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – разходящ $\forall x \notin [-|x_1|, |x_1|]$.

Радиус на сходимост:

- r – радиус на сходимост на $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ако

  $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – абсолютно сходящ за $x \in (-r, r)$ и

  $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – разходящ за $x \notin [-r, r]$;

- $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \implies r = \begin{cases} +\infty, & \ell = 0, \\ \dfrac{1}{\ell}, & 0 < l < +\infty,; \\ 0, & \ell = +\infty, \end{cases}$

- $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \implies r = \begin{cases} +\infty, & \ell = 0, \\ \dfrac{1}{\ell}, & 0 < l < +\infty, \\ 0, & \ell = +\infty. \end{cases}$

Свойства на степенните редове:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – с радиус на сходимост r, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

- $S(x)$ – непрекъсната в $(-r, r)$;
- $a_0 x + \dfrac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \dfrac{a_{n-1} x^n}{n} + \cdots = \int\limits_0^x S(t)\, dt$;
- $a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = S'(x)$.

§4. Развиване на функция в степенен ред

Развитие на функция в степенен ред:

- $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$;
- ред на Маклорен:
  $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}\, x + \dfrac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + \cdots$;
- ред на Тейлър:
  $f(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \cdots$;
- $\exists\, C = const.\ :\ |f^{(n)}(x)| \le C\ \ \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots,\ \forall\, x$
  $\Longrightarrow$ $f(x)$ може да се развие в ред на Маклорен.

Развитие в степенен ред (ред на Маклорен) на някои функции:

- $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots\ ,\quad x \in (-\infty, +\infty)$;
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\ ,\quad x \in (-\infty, +\infty)$;
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\ ,\quad x \in (-\infty, +\infty)$;
- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots\ ,\quad x \in (-1, 1)$;
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{dx^3}{3} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots\ ,\qquad x \in (-1, 1]$;
- $\arcsin x = x + \dfrac{1}{6}\, x^3 + \cdots + \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}\, x^{2n+1} + \cdots\ ,\quad x \in [-1, 1]$;
- $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\ ,\quad x \in [-1, 1]$;
- $(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + \cdots\ ,\quad x \in (-1, 1)$.

§5. Ред на Фурие

Ред на Фурие за функция в интервала $[-\pi, \pi]$:

- $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,

  $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

  $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$

Ред на Фурие за функция, четна в $[-\pi, \pi]$:

- $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$,

  $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ ,$

  $b_n = 0, \qquad\qquad\qquad\quad n = 1, 2, \ldots\ .$

Ред на Фурие за функция, нечетна в $[-\pi, \pi]$:

- $f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$,

  $a_n = 0, \qquad\qquad\qquad\quad n = 0, 1, 2, \ldots\ ,$

  $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$

Ред на Фурие за интервал $[-\ell, \ell]$:

- $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\Big)$,

  $a_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ ,$

  $b_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$

VII. ФУНКЦИИ НА ДВЕ И ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ

§1. Производни

Частни производни:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$,
  $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$,
  $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n)-f(x)}{h}$,
  $f'_{x_i}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$,
  $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Диференциране на съставна функция:

- Ако $F(t) = f(g(t),h(t))$, $f = f(x,y)$, то
  $\dfrac{dF(t)}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(g(t),h(t))\,g'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(g(t),h(t))\,h'(t)$;
- Ако $F(t) = f(g_1(t),\ldots,g_n(t))$, $f = f(x_1,\ldots,x_n)$, $x = (g_1(t),\ldots,g_n(t))$, то
  $\dfrac{dF(t)}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,g'_1(t) + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)\,g'_n(t)$.

Втори частни производни:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial \dfrac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}$, $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$,
  $f = f(x,y)$;
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial \dfrac{\partial f}{\partial x_j}}{\partial x_i}$, $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$,
  $f = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Диференциал на функция:

- $df_{(x,y)} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy$;
- $df_a = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,dx_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,dx_2 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\,dx_n$,
  $f = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Диференциал от по-висок ред на $f(x,y)$:

- $d^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dxdy + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2$;
- $d^n f = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}\,dx^k dy^{n-k}$.

Производна по направление:

- $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(x,y) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x+tp_1, y+tp_2) - f(x,y)}{t}$,
  $f = f(x,y)$,
  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ – единичен вектор в $\mathbb{R}^2$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,p_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,p_2$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(a) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+t\mathbf{p}) - f(a)}{t}$,
  $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,p_i$.
  $f = f(x_1, \ldots, x_n)$,
  $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ – единичен вектор в $\mathbb{R}^n$,
  $a \in \mathbb{R}^n$.

Градиент на функция:

- $(\operatorname{grad} f)_{(x,y)} = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big)$;
- $(\operatorname{grad} f)_a = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\Big)$,
  $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $a \in \mathbb{R}^n$.

§2. Локални екстремуми

Необходимо условие за екстремум:

- Ако $f(x,y)$ има локален екстремум в точка (x_0, y_0), то
  $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$.
- Ако $f(x_1, \ldots, x_n)$ има локален екстремум в точка $a \in \mathbb{R}^n$, то
  $f'_{x_i}(a) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Достатъчно условие за екстремум:

Нека $f'_x(x_0,y_0)=0,\ \ f'_y(x_0,y_0)=0$ и $\Delta=\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$,

- $\Delta>0$ и $f''_{xx}(x_0,y_0)>0 \implies f$ има локален минимум в (x_0,y_0);
- $\Delta>0$ и $f''_{xx}(x_0,y_0)<0 \implies f$ има локален максимум в (x_0,y_0);
- $\Delta<0 \implies f$ няма локален екстремум в (x_0,y_0).

§3. Неявни функции

Неявна функция, определена от $F(x,y)=0$:

- $y=y(x)\ :\ F(x,y(x))=0$;
- $F(x_0,y_0)=0,\ \ F'_y(x_0,y_0)\neq 0 \implies$
  $F(x,y)=0$ определя неявна функция $y=y(x),\ \ y_0=y(x_0)$;
- $y'(x)=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Неявна функция, определена от $F(x,y,z)=0$:

- $z=z(x,y)\ :\ F(x,y,z(x,y))=0$;
- $F(x_0,y_0,z_0)=0,\ F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0 \implies$
  $F(x,y,z)=0$ определя неявна функция $z=z(x,y),\ z_0=z(x_0,y_0)$;
- $z'_x(x,y)=-\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\quad z'_y(x,y)=-\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$.

§4. Условен екстремум

Условен екстремум на $f(x,y)$ при условие $\varphi(x,y)=0$:

- $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ – функция на Лагранж,
  λ – множител на Лагранж,
- точките (x^*,y^*) на условни екстремуми на $f(x,y)$ удовлетворяват системата
  $$\begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

Условен екстремум на $f(x,y,z)$ при условие $\varphi(x,y,z)=0$:

- $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$ – функция на Лагранж,
  λ – множител на Лагранж,
- точките (x^*,y^*,z^*) на условни екстремуми на $f(x,y,z)$ удовлетворяват системата
  $$\begin{cases} f'_x(x,y,z)+\lambda\varphi'_x(x,y,z)=0,\\ f'_y(x,y,z)+\lambda\varphi'_y(x,y,z)=0,\\ f'_z(x,y,z)+\lambda\varphi'_z(x,y,z)=0,\\ \varphi(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Условен екстремум на $f(x,y,z)$ при условие $\varphi(x,y,z)=0,\ \psi(x,y,z)=0$:

- $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$ – функция на Лагранж,
  λ,μ – множители на Лагранж,
- точките (x^*,y^*,z^*) на условни екстремуми на $f(x,y,z)$ удовлетворяват системата
  $$\begin{cases} f'_x(x,y,z)+\lambda\varphi'_x(x,y,z)+\mu\psi'_x(x,y,z)=0,\\ f'_y(x,y,z)+\lambda\varphi'_y(x,y,z)+\mu\psi'_y(x,y,z)=0,\\ f'_z(x,y,z)+\lambda\varphi'_z(x,y,z)+\mu\psi'_z(x,y,z)=0,\\ \varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0. \end{cases}$$

§5. Двоен интеграл

Двоен интеграл от $f(x,y)$ над област $D\subset\mathbb{R}^2$:

- $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$.

Свойства:

- $\sigma(D)=\iint\limits_D dxdy$ – лицето на областта D;
- $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D f(u,v)\,dudv$;
- $\iint\limits_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)\,dxdy=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$;
- $\iint\limits_D \lambda f(x,y)\,dxdy=\lambda\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$;

- $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy,$
  $D = D_1 \cup D_2, \quad \sigma(D_1 \cap D_2) = 0;$
- $f(x,y) \geq 0 \implies \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \geq 0;$
- $f(x,y) \leq g(x,y) \implies \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy;$
- $\Big|\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\Big| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy;$
- $f(x,y) \in [m,M] \implies \exists\, \mu \in [m,M] : \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \mu\sigma(D).$

Пресмятане:

- $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\Big]dx,$
  $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [a,b]\ ,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\big\};$
- $\iint\limits_D f_1(x)\,f_2(y)\,dxdy = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \int\limits_c^d f_2(y)\,dy,$
  $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [a,b],\ y \in [c,d]\big\}.$

Смяна на променливите:

- $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,dudv,$
  $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases} \quad (x,y) \in D, \quad (u,v) \in \overline{D},$
  $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ – Якобиан на смяната.

Полярна смяна:

- $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi))\,\rho\,d\rho d\varphi,$
  $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \quad (x,y) \in D, \quad (\rho,\varphi) \in \overline{D},$
  $|J| = |\rho| = \rho.$

§6. Приложения на двоен интеграл

Лице на равнинна фигура:

- $\sigma(D) = \iint\limits_D dxdy, \qquad D \subset \mathbb{R}^2.$

Лице на повърхнина:

- $\sigma(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy,$
  $S = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\}.$

Материална пластина:

- заема област $D \subset \mathbb{R}^2$ и има плътност $\rho = \rho(x, y)$.

Маса на материална пластина:

- $m = \iint\limits_D \rho(x, y)\, dxdy;$
- $m = \rho\, \sigma(D)$ при $\rho = const.$

Център на тежестта $G(\xi, \eta)$ на материална пластина:

- $\xi = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\rho(x, y)\, dxdy, \quad \eta = \frac{1}{m} \iint\limits_D x\rho(x, y)\, dxdy;$
- $\xi = \frac{1}{\sigma(D)} \iint\limits_D x\, dxdy, \qquad \eta = \frac{1}{\sigma(D)} \iint\limits_D y\, dxdy, \qquad \rho = const.$

Статични моменти на материална пластина:

- $M_x = \iint\limits_D y\rho(x, y)\, dxdy$ – относно оста Ox;
- $M_y = \iint\limits_D x\rho(x, y)\, dxdy$ – относно оста Oy.

Инерчни моменти на материална пластина:

- $I_x = \iint\limits_D y^2\rho(x, y)\, dxdy$ – относно оста Ox;
- $I_y = \iint\limits_D x^2\rho(x, y)\, dxdy$ – относно оста Oy;
- $I_O = I_x + I_y$ – относно началото O.

§7. Троен интеграл

Троен интеграл от $f(x,y,z)$ над област $D \subset \mathbb{R}^3$:

- $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz$.

Пресмятане:

- $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_1} \Big[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\Big]\,dxdy,$
  $D = \big\{(x,y,z):\ (x,y)\in D_1,\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\big\};$
- $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \Big(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \Big(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)dx,$
  $D = \big\{(x,y,z): x\in[a,b],\ y\in[y_1(x),y_2(x)],\ z\in[z_1(x,y),z_2(x,y)]\big\};$
- $\iiint\limits_D f_1(x)f_2(y)f_3(z)\,dxdydz = \int_a^b f_1(x)\,dx\int_c^d f_2(y)\,dy\int_p^q f_3(z)\,dz,$
  $D = \big\{(x,y,z): x\in[a,b],\ y\in[c,d],\ z\in[p,q]\big\}.$

Смяна на променливите:

- $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\overline{D}} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw,$
  $\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w), \end{cases} \quad (x,y,z)\in D,\ \ (u,v,w)\in\overline{D},$
  $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$ – Якобиан на смяната.

Цилиндрична смяна:

- $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\overline{D}} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,\rho\,d\rho d\varphi dz,$
  $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad (x,y,z)\in D,\ \ (\rho,\varphi,z)\in\overline{D},$
  $|J| = |\rho| = \rho.$

Сферична смяна:

- $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\overline{D}} f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta)\,\rho^2\cos\theta\,d\rho d\varphi d\theta,$

  $\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta, \end{cases} \qquad (x,y,z) \in D, \quad (\rho,\varphi,\theta) \in \overline{D},$

  $|J| = \rho^2\cos\theta.$

§8. Приложения на троен интеграл

Обем на тримерна област:

- $V(D) = \iiint\limits_D dxdydz, \qquad D \subset \mathbb{R}^3.$

Тяло:

- заема област $D \subset \mathbb{R}^3$ и има плътност $\rho = \rho(x,y,z)$.

Маса на тяло:

- $m = \iiint\limits_D \rho(x,y,z)\,dxdydz;$
- $m = \rho\,V(D)$ при $\rho = const.$

Център на тежестта $G(\xi,\eta,\zeta)$ на тяло:

- $\xi = \dfrac{1}{m}\iiint\limits_D x\rho(x,y,z)\,dxdydz,$

  $\eta = \dfrac{1}{m}\iiint\limits_D y\rho(x,y,z)\,dxdydz,$

  $\zeta = \dfrac{1}{m}\iiint\limits_D z\rho(x,y,z)\,dxdydz;$
- $\xi = \dfrac{1}{V(D)}\iiint\limits_D x\,dxdydz, \qquad \eta = \dfrac{1}{V(D)}\iiint\limits_D y\,dxdydz, \qquad \zeta = \dfrac{1}{V(D)}\iiint\limits_D z\,dxdydz,$

  при $\rho = const.$

Статични моменти на тяло:

- $M_{Oxy} = \iiint\limits_D z\rho(x,y,z)\,dxdydz$ – относно равнината Oxy;
- $M_{Oxz} = \iiint\limits_D y\rho(x,y,z)\,dxdydz$ – относно равнината Oxz;
- $M_{Oyz} = \iiint\limits_D x\rho(x,y,z)\,dxdydz$ – относно равнината Oyz.

Инерчни моменти на тяло:

- $I_x = \iiint\limits_D (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dxdydz$ – относно оста Ox;
- $I_y = \iiint\limits_D (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dxdydz$ – относно оста Oy;
- $I_z = \iiint\limits_D (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dxdydz$ – относно оста Oz;
- $I_O = \iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dxdydz$ – относно началото O,
  $I_O = \dfrac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$.

VIII. ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

§1. Основни понятия

Обикновено диференциално уравнение:

- $F\big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0$ – общ вид;
- $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ – нормален вид;
- n – ред на уравнението;
- $y = y(x)$ – неизвестната функция.

Начални условия:

- $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Задача на Коши:
Да се намери функция $y = y(x)$, удовлетворяваща диференциалното уравнение и дадени начални условия, т.е.

- $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$ – за уравнение от първи ред;
- $\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \end{cases}$ – за уравнение от n-ти ред.

§2. Обикновени диференциални уравнения от I ред

Уравнение с отделящи се променливи:

- $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ или $f(x)\,dx - g(y)\,dy = 0$.
- Общ интеграл:
  $\displaystyle\int f(x)\,dx - \int g(y)\,dy = C$.

Хомогенно уравнения от първи ред:

- $y' = \varphi\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$ или $P(x, y)\,dx - Q(x, y)\,dy = 0$,
  $P(x, y), Q(x, y)$ – хомогенни функции от една и съща степен, т.е.
  $P(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k P(x, y)$ и $Q(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k Q(x, y)$.
- Метод за решаване.
  Полагаме $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$, т.е. $y' = z'x + z$ и свеждаме към уравнение с отделящи се променливи.

Уравнение от вида $y' = f\Big(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\Big)$.

Метод за решаване.

- При $ab_1 - a_1b \neq 0$, чрез субституциите $x = \overline{x} + \alpha$, $y = \overline{y} + \beta$, където α и β са решение на системата $\begin{cases} \alpha a + \beta b + c = 0, \\ \alpha a_1 + \beta b_1 + c_1 = 0, \end{cases}$ получаваме хомогенно уравнение.
- При $ab_1 - a_1b = 0$ и $b = 0$ интегрираме директно уравнението.
- При $ab_1 - a_1b = 0$ и $b \neq 0$ полагаме $z = ax + by$ и получаваме уравнение с отделящи се променливи.

Линейно уравнение от първи ред:

- $y' = f(x)y + g(x)$.
- Общо решение:
  $y = e^{\int f(x)\,dx}\Big(C + \displaystyle\int g(x)\,e^{-\int f(x)\,dx}dx\Big)$.

Уравнение на Бернули:

- $y' = f(x)\,y + g(x)\,y^m$.
- Метод за решаване.

  При $m = 0$ и при $m = 1$ уравнението е линейно.

  При $m \neq 1$ полагаме $z(x) = y^{1-m}(x)$, т.е. $z' = (1-m)y^{-m}y'$ и получаваме линейно уравнение с неизвестна функция $z(x)$.

Точно диференциално уравнение:

- $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ е точно, ако $\exists\, U(x,y)$, така че
  $dU = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, т.е.
  $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \quad \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$.
- $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ е точно $\iff \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$.
- Общ интеграл:
  $U(x,y) = C$.

§3. Уравнения, допускащи понижаване на реда

- Уравнение от вида $F\big(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\big) = 0,\ \ k \geq 1.$

  Метод за решаване.

  Полагаме $z = y^{(k)}$ и получаваме уравнение от $(n-k)$-ти ред.

- Уравнение от вида $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$

  Метод за решаване.

  Полагаме $p = y'$ и считаме p за неизвестна функция, зависеща от y. Тогава

  $y'' = p\,\dfrac{dp}{dy}\ , \qquad y''' = p\Big[\Big(\dfrac{dp}{dy}\Big)^2 + p\,\dfrac{d^2p}{dy^2}\Big], \qquad \dots\ .$

  Получаваме уравнение от $(n-1)$-ви ред.

- Уравнение от вида $F\Big(x, \dfrac{y'}{y}, \dfrac{y''}{y}, \dots, \dfrac{y^{(n)}}{y}\Big) = 0.$

  Метод за решаване.

  Въвеждаме неизвестна функция $u = \dfrac{y'}{y}$. Тогава

  $\dfrac{y''}{y} = u' + u^2, \qquad \dfrac{y'''}{y} = u'' + 3uu' + u^3, \qquad \dots\ .$

  Получаваме уравнение от $(n-1)$-ви ред.

§4. Линейни диференциални уравнения от n-ти ред

Линейни хомогенни уравнения от II ред с постоянни коефициенти:

- $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$

  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$

- $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ – характеристично уравнение с корени λ_1, λ_2.

- Общо решение:

  $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$ при $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

  $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x},$ при $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

  $y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x,$ при $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \ \beta \neq 0.$

Линейни хомогенни уравнения от n-ти ред с постоянни коефициенти:

- $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0,$

  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$

- $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ – характеристично уравнение с корени $\lambda_1, \dots, \lambda_n$;

- На $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ съпоставяме функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ по правилото:
  - ако λ_1 – прост реален корен, съпоставяме $y = e^{\lambda_1 x}$,
  - ако λ_1 – r-кратен реален корен, съпоставяме r функции
    $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$, $\ldots$, $y_r = x^{r-1}e^{\lambda_1 x}$,
  - ако $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ – прост комплексен корен, съпоставяме функциите
    $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.
  - ако $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ – r-кратен комплексен корен, съпоставяме $2r$ функции:
    $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $\ldots$, $y_r = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$,
    $y_{r+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_{r+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x$, $\ldots$, $y_{2r} = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.
- Общо решение:
  $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$.

Линейни нехомогенни уравнения от n-ти ред с постоянни коефициенти. Метод на Лагранж:

- $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = f(x)$,
  $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
- Общо решение:
  $y(x) = y_{\text{хом}}(x) + \eta(x)$, където
  $y_{\text{хом}}(x)$ – общо решение на хомогенното уравнение,
  $\eta(x)$ – произволно частно решение на нехомогенното уравнение.
- Ако $y_{\text{хом}}(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$ – общо решение на хомогенното уравнение, търсим частно решение на нехомогенното уравнение във вида
  $\eta(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x)$.
  Производните $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$ определяме от системата

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_n'y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'\,y_1^{(n-1)} + C_2'\,y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'\,y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Линейни нехомогенни уравнения от n-ти ред с постоянни коефициенти и специална дясна част:

- $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$,
  $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
- Общо решение:
  $y(x) = y_{\text{хом}}(x) + \eta(x)$,
  $y_{\text{хом}}(x)$ – общо решение на хомогенното уравнение,
  $\eta(x)$ – произволно частно решение на нехомогенното уравнение.
- Ако $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, където $P(x)$ – полином и α не е корен на характеристичното уравнение, търсим частно решение на нехомогенното уравнение във вида
  $\eta = e^{\alpha x} Q(x)$,
  $Q(x)$ – полином от степен, равна на степента $P(x)$.
- Ако $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, където $P(x)$ – полином и α е k-кратен корен на характеристичното уравнение, търсим частно решение на нехомогенното уравнение във вида
  $\eta = x^k e^{\alpha x} Q(x)$,
  $Q(x)$ – полином от степен, равна на степента $P(x)$.
- Ако $f(x) = e^{\alpha x}\big[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\big]$, където $P(x)$ и $Q(x)$ – полиноми и $\alpha + i\beta$ не е корен на характеристичното уравнение, търсим частно решение на нехомогенното уравнение във вида
  $\eta = e^{\alpha x}\big[R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x\big]$,
  $R(x)$ и $S(x)$ – полиноми от степен, равна на по-голямата от степените на $P(x)$ и $Q(x)$.
- Ако $f(x) = e^{\alpha x}\big[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\big]$, където $P(x)$ и $Q(x)$ – полиноми и $\alpha + i\beta$ е k-кратен корен на характеристичното уравнение, търсим частно решение на нехомогенното уравнение във вида
  $\eta = x^k e^{\alpha x}\big[R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x\big]$,
  $R(x)$ и $S(x)$ – полиноми от степен, равна на по-голямата от степените на $P(x)$ и $Q(x)$.

Ойлерови диференциални уравнения:

- $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$,
  $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
- Полагаме $x = e^t$. Изразяваме
  $y' = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{dy}{dt}$, $\quad y'' = \dfrac{1}{x^2}\Big(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\Big)$, $\quad y''' = \dfrac{1}{x^3}\Big(\dfrac{d^3y}{dt^3} - 3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt}\Big)$, $\quad \ldots$
  и свеждаме към линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти за y като функция на t.

§5. Линейни и квазилинейни частни диференциални уравнения от I ред

Линейно частно диференциално уравнение от I ред:

- $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$
  $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n).$

Задача на Коши:
Да се намери функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяваща диференциалното уравнение и дадено допълнително условие, например

- $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \\ u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \end{cases}$

Общо решение:

- Ако $\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = C_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ – първи интеграли на системата обикновени диференциални уравнения
  $\dfrac{dx_1}{f_1(x_1, \ldots, x_n)} = \dfrac{dx_2}{f_2(x_1, \ldots, x_n)} = \cdots = \dfrac{dx_n}{f_n(x_1, \ldots, x_n)}$
  и $\varphi_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ – функционално независими, то линейното частно диференциално уравнение от I ред има общо решение
  $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$.

- $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$ – пръв интеграл на системата
  $\dfrac{dx_1}{f_1(x_1, \ldots, x_n)} = \dfrac{dx_2}{f_2(x_1, \ldots, x_n)} = \cdots = \dfrac{dx_n}{f_n(x_1, \ldots, x_n)},$
  ако $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не е константа относно независимите променливи $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но за функции
  $x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = x_n(t),$
  удовлетворяващи системата, имаме
  $\varphi\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big) = C;$

- $\varphi_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ – функционално независими, ако матрицата
  $$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$
  има ранг $n-1$.

Квазилинейно уравнение от първи ред:

- $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$.
- Общо решение:

  $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се определя като неявна функция от

  $w(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$, където

  $w(x_1, \ldots, x_n, u) = F\big(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, u)\big)$ – общо решение на линейното частно диференциално уравнение

  $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \dfrac{\partial w}{\partial x_i} + g(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \dfrac{\partial w}{\partial u} = 0,$
- $\varphi_k(x_1, \ldots, x_n, u) = C_k,\ k = 1, \ldots, n$ – първи интеграли на системата обикновени диференциални уравнения

  $\dfrac{dx_1}{f_1(x_1, \ldots, x_n, u)} = \cdots = \dfrac{dx_n}{f_n(x_1, \ldots, x_n, u)} = \dfrac{du}{g(x_1, \ldots, x_n, u)}.$

§6. Линейни частни диференциални уравнения от II ред на две променливи

Общ вид:

- $a_{11} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} + b_2 \dfrac{\partial u}{\partial y} + cu = f,$

  $u = u(x, y)$,

  коефициентите a_{ij}, b_i, c, f – функции на x и y;
- $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$,

  – при $\Delta > 0$, уравнението е от елиптичен тип,

  – при $\Delta < 0$, уравнението е от хиперболичен тип,

  – при $\Delta = 0$, уравнението е от параболичен тип.

Специални линейни частни диференциални уравнения от втори ред:

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ – уравнение на Лаплас;
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$ – уравнение на струна;
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \dfrac{\partial u}{\partial y}$ – уравнение на топлопроводност.

Формула на Даламбер за уравнение на струна при начални условия:

- задачата
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \\ u(x,0) = F(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x), \end{cases}$$
има общо решение
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[F(x-at) + F(x+at)\big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} G(x)\,dx.$$

Метод на Фурие за струна при начални и гранични условия:

- задачата
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \\ u(x,0) = F(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x), \\ u(0,t) = 0, \\ u(\ell,t) = 0, \end{cases}$$
има решение
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos\frac{n\pi a t}{\ell} + D_n \sin\frac{n\pi a t}{\ell}\right) \sin\frac{n\pi x}{\ell},$$
където
$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} F(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx,$$
$$D_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell} G(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell}dx.$$

IX. ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ

§1. Векторна функция на скаларен аргумент

В равнината:

- $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^2,\ I \subset \mathbb{R}$,
  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q) = (x(q), y(q)) = x(q)\,\mathbf{i} + y(q)\,\mathbf{j},\ q \in D$,
  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ – ортонормиран базис,
  $x(q), y(q)$ – координатни функции.

В пространството:

- $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}$,
  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q) = \big(x(q), y(q), z(q)\big) = x(q)\,\mathbf{i} + y(q)\,\mathbf{j} + z(q)\,\mathbf{k},\ q \in D$,
  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – ортонормиран базис,
  $x(q), y(q), z(q)$ – координатни функции.

Свойства:

- $\lim\limits_{q \to q_0} \big(\mathbf{r_1}(q) \pm \mathbf{r_2}(q)\big) = \lim\limits_{q \to q_0} \mathbf{r_1}(q) \pm \lim\limits_{q \to q_0} \mathbf{r_2}(q)$;
- $\lim\limits_{q \to q_0} \big(\mathbf{r_1}(q)\,\mathbf{r_2}(q)\big) = \lim\limits_{q \to q_0} \mathbf{r_1}(q) \lim\limits_{q \to q_0} \mathbf{r_2}(q)$;
- $\lim\limits_{q \to q_0} \big(\mathbf{r_1}(q) \times \mathbf{r_2}(q)\big) = \lim\limits_{q \to q_0} \mathbf{r_1}(q) \times \lim\limits_{q \to q_0} \mathbf{r_2}(q)$;
- За $\mathbf{r}(q) = \big(x(q), y(q), z(q)\big)$ и $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$,

$$\lim_{q \to q_0} \mathbf{r}(q) = \mathbf{a} \iff \begin{cases} \lim\limits_{q \to q_0} x(q) = a_1, \\ \lim\limits_{q \to q_0} y(q) = a_2, \\ \lim\limits_{q \to q_0} z(q) = a_3. \end{cases}$$

Производна:

- $\mathbf{r}'(q) = \dfrac{d\mathbf{r}(q)}{dq} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathbf{r}(q+h) - \mathbf{r}(q)}{h} = \big(x'(q), y'(q), z'(q)\big)$.

Свойства:

- $(\mathbf{r_1} + \mathbf{r_2})'(q) = \mathbf{r_1}'(q) + \mathbf{r_2}'(q)$;
- $(f\mathbf{r})'(q) = f'(q)\,\mathbf{r}(q) + f(q)\,\mathbf{r}'(q)$;
- $(\mathbf{r_1}\mathbf{r_2})'(q) = \mathbf{r_1}'(q)\,\mathbf{r_2}(q) + \mathbf{r_1}(q)\,\mathbf{r_2}'(q)$;
- $(\mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2})'(q) = \mathbf{r_1}'(q) \times \mathbf{r_2}(q) + \mathbf{r_1}(q) \times \mathbf{r_2}'(q)$.

§2. Гладка линия

Линия:

- $\gamma = \{M : \overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(q),\ q \in [a,b]\}$;
- $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(q),\ \ q \in [a,b]$.

Означения за производни:

- $\dot{\mathbf{r}}$ за $\mathbf{r}'$, $\ddot{\mathbf{r}}$ за $\mathbf{r}''$, $\dddot{\mathbf{r}}$ за $\mathbf{r}'''$, **...**

Гладка линия:

- $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(q),\ \ q \in [a,b]$, такава че
  $\dot{\mathbf{r}}$ – непрекъсната,
  $\dot{\mathbf{r}}(q) \neq \mathbf{o}$ за всяко $q \in [a,b]$.

Допирателна на линия $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(q)$ в точка $M_0 = \mathbf{r}(q_0)$:

- права g, такава че
  $M_0 \in g$,
  $g \| \dot{\mathbf{r}}(q_0)$.

Дължина на дъга:

- $s(q) = \displaystyle\int_{q_0}^{q} \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(t)}\, dt$;
- $\dot{s}(q) = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(q)}$.

Естествена параметризация:

- $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, s – дължината на дъгата $\overset{\frown}{M_0 M}$,
  $M_0\big(x(s_0), y(s_0), z(s_0)\big),\ \ M\big(x(s), y(s), z(s)\big)$;
- q – естествен параметър $\iff$ $|\dot{\mathbf{r}}| = 1$.

Означения за производни относно естествения параметър:

- $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, $\mathbf{r}'''$, **...**

§3. Равнинни линии

- $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(q),\ \ q \in [a,b]$,
  $\mathbf{r}(q) = (x(q), y(q)) = x(q)\,\mathbf{i} + y(q)\,\mathbf{j}$;
- $\gamma : \begin{cases} x = x(q), \\ y = y(q), \end{cases} \qquad q \in [a,b]$.

Единичен допирателен вектор:

- $\mathbf{t} = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(q)}{|\dot{\mathbf{r}}(q)|} = \dfrac{(\dot{x}(q), \dot{y}(q))}{\sqrt{\dot{x}^2(q) + \dot{y}^2(q)}}$.

Единичен нормален вектор:

- $\mathbf{N} = \dfrac{(-\dot{y}(q), \dot{x}(q))}{\sqrt{\dot{x}^2(q) + \dot{y}^2(q)}}$.

Равнинна кривина:

- $K = \dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{s}^3}$,
- $K(s) = \alpha'(s)$,
  s – естествения параметър на γ,
  $\alpha(s) = \sphericalangle(\mathbf{r}'(\mathbf{s}), Ox)$;
- γ – права $\iff K = 0$;
- γ – окръжност с радиус R $\iff K = \dfrac{1}{R}$.

Формули на Френе:

- $\mathbf{r}' = \mathbf{t}$;
- $\mathbf{t}' = K\mathbf{N}$;
- $\mathbf{N}' = -K\mathbf{t}$.

Радиус на кривина:

- $P = \dfrac{1}{K}$.

Център на кривина, еволюта, еволвента:

- $\overline{M}(q) = \big(\overline{x}(q), \overline{y}(q)\big)$ – център на кривината на $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(q)$ в точка $M(q)$, ако $\overrightarrow{O\overline{M}} = \mathbf{r}(q) + P(q)\mathbf{N}(q)$,
  $\overline{x}(q) = x(q) - P(q)\dfrac{\dot{y}(q)}{\dot{s}(q)}, \qquad \overline{y}(q) = y(q) + P(q)\dfrac{\dot{x}(q)}{\dot{s}(q)}$,
  $\overline{x} = x - \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\,\dot{y}, \qquad \overline{y} = y + \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\,\dot{x}$;
- $\overline{\gamma} = \big\{\overline{M}(q) : \overrightarrow{O\overline{M}} = \mathbf{r}(q) + P(q)\mathbf{N}(q)\big\}$ – еволюта на γ,
  $\overline{\gamma} : \overline{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + P\mathbf{N}$,
  γ – еволвента на $\overline{\gamma}$,
  $(x - \overline{x})^2 + (y - \overline{y})^2 = |P|^2$ – окръжност на кривина на γ в точка $M(q)$.

§4. Линии в пространството

- $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(q),\ \ q \in [a,b]$,
  $\mathbf{r}(q) = \big(x(q), y(q), z(q)\big) = x(q)\,\mathbf{i} + y(q)\,\mathbf{j} + z(q)\,\mathbf{k}$;
- $\gamma : \begin{cases} x = x(q), \\ y = y(q), \\ z = z(q), \end{cases} \qquad q \in [a,b]$.

Единичен допирателен вектор:

- $\mathbf{t} = \dfrac{\dot{r}}{\dot{s}}$.

Единичен вектор по главната нормала:

- $\mathbf{n} = \dfrac{\ddot{\mathbf{r}}\dot{s} - \dot{\mathbf{r}}\ddot{s}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}$.

Единичен вектор по бинормалата:

- $\mathbf{b} = \dfrac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}$.

Кривина:

- $\varkappa = \dfrac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{\dot{s}^3}$.

Торзия (усукване):

- $\tau = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}\,\dddot{\mathbf{r}}}{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})^{\mathbf{2}}}$.

Оскулачна равнина ω:

- ω съдържа допирателната и главната нормала;
- $\overrightarrow{M_0M}\,\mathbf{b} = 0,\ \ M_0\big(x(q_0), y(q_0), z(q_0)\big) \in \omega$.

Ректифицираща равнина ρ:

- ρ съдържа тангентата и бинормалата;
- $\overrightarrow{M_0M}\,\mathbf{n} = 0,\ \ M_0\big(x(q_0), y(q_0), z(q_0)\big) \in \rho$.

Нормална равнина ν:

- ν съдържа главната нормала и бинормалата;
- $\overrightarrow{M_0M}\,\mathbf{t} = 0,\ \ M_0\big(x(q_0), y(q_0), z(q_0)\big) \in \nu$.

Формули на Френе:

- $\mathbf{r}' = \mathbf{t}, \qquad \mathbf{t}' = \varkappa\,\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}' = -\varkappa\,\mathbf{t} + \tau\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = -\tau\,\mathbf{n}$.

§5. Повърхнини – основни понятия

- $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v),\ \ (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$,
  $\mathbf{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}$;

- $S : \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$,

Означения:

- $\mathbf{r}_u = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \qquad \mathbf{r}_v = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$;
- $E = \mathbf{r}_u^2, \qquad F = \mathbf{r}_u\,\mathbf{r}_v, \qquad G = \mathbf{r}_v^2$.

Линии върху S:

- $u = u(q)\ , \quad v = v(q)$;
- u-линии: $u = q,\ \ v = const.$;
- v-линии: $u = const.,\ \ v = q$.

В точка $M(u,v) \in S$:

- $\mathbf{n}(u,v) = \mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)$ – нормален вектор към S;
- права през $M(u,v)$ и успоредна на $\mathbf{n}(u,v)$ – нормала към S;
- равнина през $M(u,v)$ и ортогонална на $\mathbf{n}(u,v)$ – допирателна равнина към S.

Дължина на дъга:

- $s = \displaystyle\int_{q_0}^{q} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\,dq$.

Ъгъл между линии върху повърхнина:

- $\cos\varphi = \dfrac{E\lambda_1\lambda_2 + F(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + G\mu_1\mu_2}{\sqrt{E(\lambda_1)^2 + 2F\lambda_1\mu_1 + G(\mu_1)^2}\,\sqrt{E(\lambda_2)^2 + 2F\lambda_2\mu_2 + G(\mu_2)^2}}$,
  $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}),\ \ \mathbf{p_1} = \lambda_1\mathbf{r}_u + \mu_1\mathbf{r}_v,\ \ \mathbf{p_2} = \lambda_2\mathbf{r}_u + \mu_2\mathbf{r}_v$.

Лице на повърхнина:

- $\sigma(S) = \displaystyle\iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv$.

X. КРИВОЛИНЕЙНИ И ПОВЪРХНИННИ ИНТЕГРАЛИ

§1. Криволинеен интеграл от първи тип

За равнинна линия:

- $\int\limits_L f(x,y)\,ds$,
  $f : L \to \mathbb{R}$, L – равнинна линия,
  ds – диференциал на равнинна дъга;
- $\int\limits_L f(x,y)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta f\big(x(q),y(q)\big)\sqrt{\dot{x}^2(q)+\dot{y}^2(q)}\,dq$,
  $L : \begin{cases} x = x(q), \\ y = y(q), \end{cases} \quad q \in [\alpha,\beta]$;
- $\int\limits_L f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b f\big(x,y(x)\big)\sqrt{1+\big[y'(x)\big]^2}\,dx$,
  $L : \begin{cases} x = x, \\ y = y(x), \end{cases} \quad x \in [a,b]$;
- $\int\limits_{\widehat{AB}} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\widehat{BA}} f(x,y)\,ds$;

За пространствена линия:

- $\int\limits_L f(x,y,z)\,ds$,
  $f : L \to \mathbb{R}$, L – пространствена линия,
  ds – диференциал на пространствена дъга;
- $\int\limits_L f(x,y,z)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta f\big(x(q),y(q),z(q)\big)\sqrt{\dot{x}^2(q)+\dot{y}^2(q)+\dot{z}^2(q)}\,dq$,
  $L : \begin{cases} x = x(q), \\ y = y(q), \\ z = z(q) \end{cases} \quad q \in [\alpha,\beta]$;
- $\int\limits_{\widehat{AB}} f(x,y,z)\,ds = \int\limits_{\widehat{BA}} f(x,y,z)\,ds$.

§2. Криволинеен интеграл от втори тип

За равнинна линия:

- $\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$,
  $P, Q : L \to \mathbb{R}$, L – равнинна линия;
- $\oint\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$,
  L – затворен равнинен контур;
- $\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_\alpha^\beta \big[P(x(q),y(q))\,\dot{x}(q) + Q(x(q),y(q))\,\dot{y}(q)\big]\,dq$,
  $L : \begin{cases} x = x(q), \\ y = y(q), \end{cases} \quad q \in [\alpha, \beta]$;
- $\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{\widehat{BA}} P\,dx + Q\,dy$.

Лице на равнинна област D:

- $\sigma(D) = \dfrac{1}{2}\oint\limits_{\partial D} x\,dy - y\,dx$.

Формула на Грийн:

- $\iint\limits_D \Big(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy = \oint\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$;
- $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ в $D \implies \oint\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = 0$.

За пространствена линия:

- $\int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$,
  $P, Q, R : L \to \mathbb{R}$, L – пространствена линия;
- $\oint\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$,
  L – затворен пространствен контур;

- $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_\alpha^\beta \big[P(\mathbf{r}(q))\,\dot{x}(q) + Q(\mathbf{r}(q))\,\dot{y}(q) + R(\mathbf{r}(q))\,\dot{z}(q)\big]\,dq,$

  $L : \begin{cases} x = x(q), \\ y = y(q), \\ z = z(q) \end{cases} \quad \mathbf{r}(q) = \big(x(q), y(q), z(q)\big), \;\; q \in [\alpha, \beta];$

- $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$

§3. Интеграл от първи тип върху повърхнина

- $\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma,$

  $f : L \to \mathbb{R}$, L – линия,

  $d\sigma$ – диференциал на повърхнина;

- $\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_D f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\,dxdy,$

  $S : z = z(x,y), \;\; (x,y) \in D, \;\; D \subset \mathbb{R}^2;$

- $\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_D f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\,\sqrt{EG - F^2}\,dudv,$

  $S : \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \;\; , \;\; (u,v) \in D, \;\; D \subset \mathbb{R}^2;$

§4. Интеграл от втори тип върху повърхнина

- $\iint\limits_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy,$

  $P, Q, R : S \to \mathbb{R}$, S – ориентирана повърхнина;

- $\oiint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy,$

  S – затворена повърхнина, ориентирана с външната си нормала;

- $\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = -\iint\limits_{S^-} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy,$

  S^- – повърхнината с ориентация обратна на S;

- $\iint\limits_S R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_D R\big(x,y,z(x,y)\big)\,dxdy,$

  $S : z = z(x,y),\ (x,y) \in D,$

  S е ориентирана така, че нормалният вектор сключва остър ъгъл с положителната посока на Oz.

Формула на Стокс:

- $\iint\limits_S \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy =$

  $= \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$

  S – ориентирана повърхнина с контур затворената линия L.

Формула на Гаус - Остроградски:

- $\iiint\limits_G \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz = \oiint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy.$

Векторно поле:

- $\mathbf{A} = \mathbf{A}(P,Q,R) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}.$

Дивергенция на векторно поле:

- $\operatorname{div}\mathbf{A} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}.$

Ротор на векторно поле:

- $\mathbf{rot}\ \mathbf{A} = \Big(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathbf{i} + \Big(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathbf{j} + \Big(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathbf{k}.$

XI. ЕЛЕМЕНТИ ОТ ТЕОРИЯ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ

§1. Основни понятия и теореми

Вероятност на събитие:

- $P(A) = \dfrac{k}{n}$ при равновъзможни изходи,
  k – брой на изходите, благоприятни за настъпване на събитие A,
  n – брой на всички възможни изходи.

Свойства на вероятностите:

- $P(\phi) = 0$, ϕ – невъзможно събитие;
- $P(\Omega) = 1$, Ω – достоверно събитие;
- $0 \leq P(A) \leq 1$.

Несъвместими събития:

- $A \cap B = \phi$.

Теорема за събиране на вероятности:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ако A и B са несъвместими.

Условна вероятност за събитие A при условие B:

- $P(A\,|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Независими събития:

- $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

Пълна група събития $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

- $A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$ и $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Теорема за пълната вероятност:

- $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A\,|A_i)P(A_i)$ за пълна група събития $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Формула на Бейс:

- $P(A_j\,|A) = \dfrac{P(A\,|A_j)P(A_j)}{P(A)}$, $j = 1, \ldots, n$, за пълна група събития $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

§2. Случайни величини

Функция на разпределение на случайна величина ξ:

- $F(x) = P(\xi < x)$.

Свойства на функцията на разпределение:

- $0 \leq F(x) \leq 1$;
- $F(x)$ е растяща функция;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$,
  $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
- $P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$.

Плътност на вероятностите:

- $f(x) = F'(x)$.

Свойства на функцията на плътността:

- $f(x) \geq 0$;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$;
- $\displaystyle F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;
- $\displaystyle P(a \leq \xi < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$.

Математическо очакване:

- $\displaystyle M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x)$.

Свойства на математическото очакване:

- $\xi \geq 0 \implies M\xi \geq 0$;
- $\xi = C = const. \implies M\xi = C$;
- $M(C\xi) = C\,M\xi$;
- $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$;
- $M(\xi\eta) = M\xi\,M\eta$ за независими случайни величини ξ и η.

Дисперсия:

- $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$.

Свойства на дисперсията:

- $D\xi \geq 0$;
- $\xi = const. \implies D\xi = 0$;
- $D(C\xi) = C^2\, D\xi,\ \ C = const.$;
- $D(\xi \pm \eta) = D(\xi) + D(\eta)$ за независими случайни величини ξ и η.
- $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$.

Средно-квадратично отклонение:

- $\sigma\xi = \sqrt{D\xi}$.

§3. Дискретни случайни величини

Закон на разпределение на дискретна случайна величина ξ:

- $\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_1 & \dots & x_n & \dots \\ \hline p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{array}\right|, \qquad p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1,$
  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ – стойности на ξ,
  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ – съответните вероятности.

Математическо очакване, дисперсия, мода:

- $M\xi = \sum\limits_n p_n x_n$ – математическо очакване на ξ,
- $D\xi = \sum\limits_n p_n x_n^2 - \left(\sum\limits_n p_n x_n\right)^2$ – дисперсия на ξ,
- x_r – мода на случайната величина ξ, ако $p_r = \max\limits_k p_k$.

Основни дискретни разпределения:

- Биномно разпределение:
  $x_k = k,\ \ k = 0, 1, \dots, n,$
  $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ \ k = 0, 1, \dots, n, \quad (0 \leq p \leq 1),$
  $M\xi = np,$
  $D\xi = np(1-p).$
- Разпределение на Поасон:
  $x_k = k, \quad k = 0, 1, \dots,$
  $p_k = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots,$
  $M\xi = \lambda,$
  $D\xi = \lambda.$

§4. Непрекъснати случайни величини

Означения:

- ξ – непрекъсната случайна величина,
  $f(x)$ – плътност на вероятностите на ξ,
  $F(x)$ – функция на разпределение на ξ.

Математическо очакване, дисперсия, мода, медиана:

- $M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ – математическо очакване на ξ,
- $D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx\Big)^2$ – дисперсия на ξ,
- x^* – мода на ξ, ако $f(x^*) = \max f(x)$.
- x_0 – медиана на ξ, ако $F(x_0) = \frac{1}{2}$, т.е. $P(x < x_0) = P(x \geq x_0) = \frac{1}{2}$.

Основни непрекъснати разпределения:

- Равномерно разпределение:

  $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 1, & x > b, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \end{cases}$$

  $$M\xi = \frac{a+b}{2}, \qquad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- Показателно разпределение:

  $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\mu x}, & x \geq 0, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \mu e^{-\mu x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

  $$M\xi = \frac{1}{\mu}, \qquad D\xi = \frac{1}{\mu^2}.$$

- Нормално (Гаусово) разпределение:

  $$f(x) = \frac{e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}},$$

  $$M\xi = a, \qquad D\xi = \sigma,$$

  $$P(\alpha < \xi < \beta) = \frac{1}{2}\Big[\Phi\big(\frac{\beta-a}{\sqrt{2}\,\sigma}\big) - \Phi\big(\frac{\alpha-a}{\sqrt{2}\,\sigma}\big)\Big],$$

  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ – функция на Лаплас.

СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор 3
Използвани означения 4
I. Множества, комбинаторика, тригонометрия 5
II. Алгебра 10
III. Аналитична геометрия 18
IV. Функции на една променлива 30
V. Неопределен и определен интеграл 35
VI. Числови и функционални редове 43
VII. Функции на две и повече променливи 49
VIII. Диференциални уравнения 58
IX. Диференциална геометрия 66
X. Криволинейни и повърхнинни интеграли 71
XI. Елементи от теория на вероятностите 75