ДВАНАДЕСЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА

ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“

14-16 НОЕМВРИ 2025 г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

1. Пресметнете $\sqrt{2025+\sqrt[2025]{2025!}}+\sqrt[2025]{2025+\sqrt{2025!}}$ с точност 20 знака след десетичната точка.

   Отговор: 79.97264817254805878066

2. Кривата γ зададена параметрично с $x = \cos t$, $y = \sin t \cos^2 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Да се намери точка от кривата γ такава, че допирателната към γ в тази точка пресича координатните оси в положителните им части и триъгълникът, образуван от координатните оси и допирателната има възможно най-малко лице.

   Отговор: $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{8}\right\}$

3. Намерете трите най-малки естествени числа k, такива че 2025_k (k-ична основа на бройната система) е просто число?

   Отговор: 6; 9; 11

4. Намерете стойността на израза $\left(\frac{x-y}{x}\right)^{50}+\left(\frac{x-y}{y}\right)^{50}$, ако е дадено, че $\frac{x}{y}+\frac{x+y}{x}=0$.

   Отговор: 847288609443

5. По колко начина може да се представи комплексното число $2023 + i\ 2027$ като произведение на две комплексни числа, чийто реални и имагинерни части са целочислени, а модулите им са поне 2.

   Отговор: 56

6. Намерете лицето на общата част на трите кръга с радиуси 10 и центрове в точките с координати (0,0), (10,0), (0,10).

   Отговор: $-50\sqrt{3}+\frac{125\pi}{3} \approx 44.2972$

7. Четно или нечетно число е цялата част на $\left(3+\sqrt{2}\right)^{2025}$?

   Отговор: нечетно

8. Колко са естествените числа $n \in [2000,3000]$ такива, че поне два от коефициентите в нормалния вид на полинома $(x-1)^3(x+1)^n$ са равни на 0.

   Отговор: 11

9. Да се намерят броят и сумата на различните 4×4 (0,1)-матрици (с елементи 0 или 1) с нулеви детерминанти.

   Отговор: 42976, $\begin{pmatrix} 20624 & 20624 & 20624 & 20624 \\ 20624 & 20624 & 20624 & 20624 \\ 20624 & 20624 & 20624 & 20624 \\ 20624 & 20624 & 20624 & 20624 \end{pmatrix}$

10. Да се намерят всички естествени числа n такива, че функцията

$$f(x_1,\ldots,x_{25}) = \frac{1}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{25}^2)^n}}$$

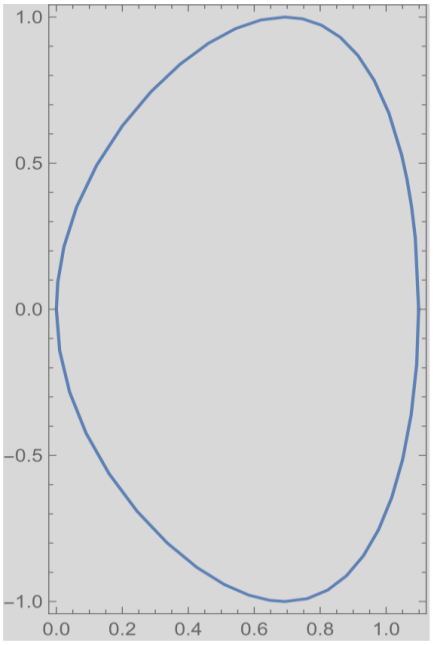
изпълнява тъждествено равенството $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{25}^2} = 0.$

Отговор: 23

11. Пресметнете $f(2025)$, ако $f(n) = \begin{cases} n - 10, & n > 2025, \\ f\big(f(n + 25)\big), & n \le 2025. \end{cases}$

Отговор: 2030

12. Крива е зададена параметрично с уравненията $x = \ln(2+\cos t)$, $y = \sin t$, $t \in [0,2\pi]$. Да се начертае кривата и да се намери лицето на оградената от нея област.

Отговор: 

, $-2(-2+\sqrt{3})\pi \approx 1.6836$

13. Намерете всички естествени числа n, $n \le 2025$, за които числото $M = \frac{(n+2025)^3+1}{25\,n}$ е цяло.

Отговор: 74

14. Кое число е по-голямо: $a = 2^{100!}$ или $b = (2^{100})!$?

Отговор: $a = 2^{100!}$

15. Нека $p(x)=(\ldots(2-(2-(2-(2-x^2)^2)^2)^2)\ldots)^2$ е полином, в който броят (отварящи, а също и затварящи) скоби е 2025. Да намери броят на цифрите в десетичния запис на коефициента пред x^4.

Отговор: 2438

16. Да се намерят всички решения на уравнението $x^{25} + y^{25} = z^{25} \pmod 6$ за които $xyz \neq 0$.

Отговор: $(1,1,2)$, $(1,4,5)$, $(2,2,4)$, $(2,5,1)$, $(4,1,5)$, $(4,4,2)$, $(5,2,1)$, $(5,5,4)$

17. Да се намери сборът на най-малката и на най-голямата стойност на функцията $f(x) = \frac{2+\ln x}{x} + x\ ,\ x \in [e^{-1}, e]$.

    Отговор: $3 + e + \frac{3}{e} \approx 6.8219$

18. Вярно ли е неравенството

    $\sqrt{99 \cdot 101} + \sqrt{98 \cdot 102} + \cdots + \sqrt{2 \cdot 198} + \sqrt{1 \cdot 199} < 2500\pi$?

    Отговор: Да.

19. В коя от редиците $\{13n^3 + 2025\}_{n=1}^{2025}$, $\{17n^3 + 2025\}_{n=1}^{2025}$, $\{19n^3 + 2025\}_{n=1}^{2025}$ простите числа са най-много.

    Отговор: Втората.

20. Да се реши уравнението: $2^{|y|} + \ln(x^2 + |x + y|) - \cos y = 0$.

    Отговор: Изразява се x като функция на y. Задачата има безкрайно много решения.

21. Кръг с център $O(0,0)$ има точно 2 общи точки с графиката на функцията $y(x) = x + \frac{4}{x}$. Да се намери лицето на кръга.

    Отговор: $S \approx 60.6758$

22. Да се реши уравнението: $2x \sin\frac{\pi x^2}{x^4+4} + \frac{x^2}{2} + 1 = 0$.

    Отговор: $x = -\sqrt{2} \approx -1.41421$

23. Нека p е 2025-тото поредно просто число. Да се намери най-малкото естествено число n, такова че матрицата $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^n$ е сравнима (покомпонентно) по модул p с единичната матрица от ред 2.

    Отговор: 8804

24. Да се намери най-малкото естествено число n такова, че измежду числата n, n+1, … , n+100 няма нито едно просто.

    Отговор: 370262

25. Колко са точните квадрати в редицата на Фибоначи $\{F_k\}_{k=1}^{2025}$?

    Отговор: Три; $n = 1;\ 2;\ 12$

26. Да се пресметне границата $\lim_{n\to\infty} a_n$, където

$$a_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n^{50}}{(k-25)(k-24)\ldots(k-1)k(k+1)\ldots(k+24)(k+25)}.$$

    Отговор: $\frac{1}{50}$

27. Да се намерят координатите на всички точки $M(x,y)$, намиращи се на равни разстояния от точката $A(8,7)$, правата $g: 2x-7y+9 = 0$ и окръжността $k: (x+2)^2 + (y-5)^2 = 9$.

    Отговор: $M_1(4.4686,6.3055)$, $M_2(10.1815,76.21157)$,

28. Намерете минимума на функцията $f(x) = x^6+x^4+x^2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}$ за $x>0$.

    Отговор: 9

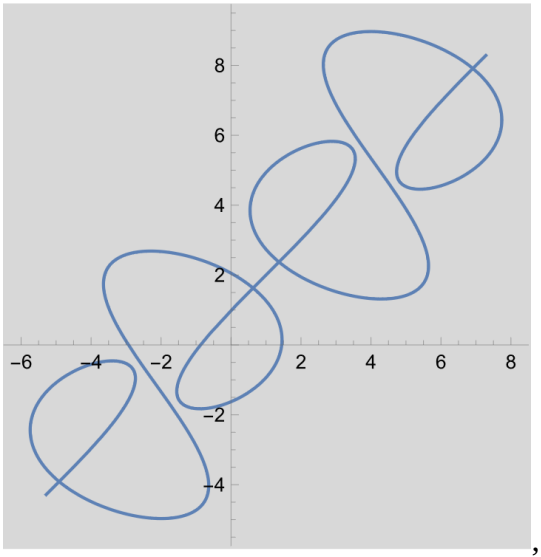
29. Колко различни минора могат да се образуват в една матрица с размер 20 x 25 ?

Отговор: 3169870830125

30. Начертайте кривата, зададена параметрично:

$x(t) = 1+ t + 2\sin 3t,\ y = 2 + t + 3\sin 2t,\ -2\pi \le t \le 2\pi.$

Намерете координатите на точка $P(x,y)$ от кривата, намираща се на най-малко разстояние от началото $O(0,0)$.

Отговор 

, $\{-0.500036, 0.441597\}$

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се точност на използваната система за компютърна математика. Всяка задача се оценява с 2 точки.