ДВАНАДЕСЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА

ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“

14-16 НОЕМВРИ 2025 г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

1. Пресметнете $\sqrt{2025+\sqrt[2025]{2025!}}+\sqrt[2025]{2025+\sqrt{2025!}}$ с точност 20 знака след десетичната точка.
2. Кривата γ зададена параметрично с $x=\cos t$, $y=\sin t\cos^2 t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Да се намери точка от кривата γ такава, че допирателната към γ в тази точка пресича координатните оси в положителните им части и триъгълникът, образуван от координатните оси и допирателната има възможно най-малко лице.
3. Намерете трите най-малки естествени числа k, такива че 2025_k (k-ична основа на бройната система) е просто число?
4. Намерете стойността на израза $\left(\frac{x-y}{x}\right)^{50}+\left(\frac{x-y}{y}\right)^{50}$, ако е дадено, че $\frac{x}{y}+\frac{x+y}{x}=0$.
5. По колко начина може да се представи комплексното число $2023+i\,2027$ като произведение на две комплексни числа, чийто реални и имагинерни части са целочислени, а модулите им са поне 2.
6. Намерете лицето на общата част на трите кръга с радиуси 10 и центрове в точките с координати (0,0), (10,0), (0,10).
7. Четно или нечетно число е цялата част на $\left(3+\sqrt{2}\right)^{2025}$?
8. Колко са естествените числа $n\in[2000,3000]$ такива, че поне два от коефициентите в нормалния вид на полинома $(x\text{-}1)^3(x\text{+}1)^n$ са равни на 0.
9. Да се намерят броят и сумата на различните 4×4 (0,1)-матрици (с елементи 0 или 1) с нулеви детерминанти.
10. Да се намерят всички естествени числа n такива, че функцията

$$f(x_1,\ldots,x_{25})=\frac{1}{\sqrt{\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{25}^2\right)^n}}$$

изпълнява тъждествено равенството $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_{25}^2}=0$.

11. Пресметнете $f(2025)$, ако $f(n)=\begin{cases}n-10, & n>2025,\\ f\big(f(n+25)\big), & n\le 2025.\end{cases}$
12. Крива е зададена параметрично с уравненията $x=\ln(2+\cos t)$, $y=\sin t$, $t\in[0,2\pi]$. Да се начертае кривата и да се намери лицето на оградената от нея област.
13. Намерете всички естествени числа n, $n\le2025$, за които числото $M=\frac{(n+2025)^3+1}{25\,n}$ е цяло.
14. Кое число е по-голямо: $a=2^{100!}$ или $b=(2^{100})!$?

15. Нека $p(x)=(\ldots(2-(2-(2-(2-x^2)^2)^2)^2)\ldots)^2$ е полином, в който броят (отварящи, а също и затварящи) скоби е 2025. Да намери броят на цифрите в десетичния запис на коефициента пред x^4.
16. Да се намерят всички решения на уравнението $x^{25}+y^{25}=z^{25} \pmod 6$ за които $xyz \neq 0$.
    Отговор: (1,1,2), (1,4,5), (2,2,4), (2,5,1), (4,1,5), (4,4,2), (5,2,1), (5,5,4)
17. Да се намери сборът на най-малката и на най-голямата стойност на функцията
    $f(x)=\frac{2+\ln x}{x}+x$, $x \in [e^{-1}, e]$.
18. Вярно ли е неравенството
    $\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+\cdots+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199}<2500\pi$?
19. В коя от редиците $\{13n^3+2025\}_{n=1}^{2025}$, $\{17n^3+2025\}_{n=1}^{2025}$, $\{19n^3+2025\}_{n=1}^{2025}$ простите числа са най-много.
20. Да се реши уравнението: $2^{|y|}+\ln(x^2+|x+y|)-\cos y=0$.
21. Кръг с център $O(0,0)$ има точно 2 общи точки с графиката на функцията $y(x)=x+\frac{4}{x}$. Да се намери лицето на кръга.
22. Да се реши уравнението: $2x\sin\frac{\pi x^2}{x^4+4}+\frac{x^2}{2}+1=0$.
23. Нека p е 2025-тото поредно просто число. Да се намери най-малкото естествено число n, такова че матрицата $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix}^n$ е сравнима (покомпонентно) по модул p с единичната матрица от ред 2.
24. Да се намери най-малкото естествено число n такова, че измежду числата n, $n+1$, … , $n+100$ няма нито едно просто.
25. Колко са точните квадрати в редицата на Фибоначи $\{F_k\}_{k=1}^{2025}$?
26. Да се пресметне границата $\lim_{n\to\infty} a_n$, където
    $$a_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{n^{50}}{(k-25)(k-24)\ldots(k-1)k(k+1)\ldots(k+24)(k+25)}.$$
27. Да се намерят координатите на всички точки $M(x,y)$, намиращи се на равни разстояния от точката $A(8,7)$, правата $g: 2x-7y+9=0$ и окръжността $k: (x+2)^2+(y-5)^2=9$.
28. Намерете минимума на функцията $f(x)=x^6+x^4+x^2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}$ за $x>0$.
29. Колко различни минора могат да се образуват в една матрица с размер 20 x 25 ?
30. Начертайте кривата, зададена параметрично:
    $x(t)=1+t+2\sin 3t$, $y=2+t+3\sin 2t$, $-2\pi \le t \le 2\pi$.
    Намерете координатите на точка $P(x,y)$ от кривата, намираща се на най-малко разстояние от началото $O(0,0)$.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се точност на използваната система за компютърна математика. Всяка задача се оценява с 2 точки.