ДВАНАДЕСЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА

ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ

14-16 НОЕМВРИ 2025 г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА Б

1. Пресметнете израза

$$\sqrt[5]{\frac{x^2}{x+y}+\frac{xy}{y^2-1}}.$$

при $x=-2.5$ и $y=-1.2$ с точност до 10 верни знака след десетичната запетая.
Отговор: 1.3867763129

2. Да се реши уравнението (a е параметър):

$$\begin{vmatrix} a & x & x & x & x \\ x & a & x & x & x \\ x & x & a & x & x \\ x & x & x & a & x \\ x & x & x & x & a \end{vmatrix} = 0.$$

Отговор: $a, -\frac{a}{4}$

3. Преобразувайте числото $362C_{(13)}$ от тринадесетична в десетична бройна система.
Отговор: $7643_{(10)}$

4. Намерете сбора от коефициентите на полинома

$$(6x^5-5x^4+4x^3-3x^2+x-4)^{2025}.$$

Отговор: -1

5. Да се пресметне сумата

$$\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\cdots+\frac{2}{2021\cdot2023}+\frac{2}{2023\cdot2025}.$$

Отговор: $\frac{2024}{2025}$

6. Да се реши уравнението:

$$|x-3|^{x+5}=1.$$

Отговор: $-5,2,4$

7. Да се намерят стойностите на реалните параметри a и b, ако е известно, че $1+i$ е нула на полинома $p(x)=3x^4-5x^3+3x^2+ax-b$. За намерените стойности на параметрите да се разложи полиномът на прости множители.

Отговор: $a=4, b=2, (x-1+i)(x-1-i)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)$

8. За кои стойности на реалния параметър m функцията $f(x)=x^3+mx^2+4x+3$ има локален максимум в $x=-2$?

Отговор: 4

9. Даден е полиномът $P = \sum_{i=1}^{n}(2x-3)^{p_i}$, където $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ е редицата на простите числа, по-малки от 2025, а n е техният брой. Да се намери коефициентът пред x^2 в нормалния вид на P.

Отговор: -2042427122814546403181…854695288879043224

10. Избират се 16 калцуна от кош, който съдържа 8 пробити калцуна. Вероятността да се изберат всичките 8 пробити калцуна е 10 пъти по-голяма от вероятността всичките избрани калцуни да са здрави (непробити). Колко калцуна има в коша?

Отговор: 29

11. Разпределението на дискретната случайна величина X се дава със следната таблица. Да се намери стойността на y, ако $\mathbb{E}X^2 = \frac{4}{3}$.

x_i	y	1	$\sqrt{2y}$
$P(X = x_i)$	$1/9$	$5/9$	$1/3$

Отговор: -7

12. Даден е полиномът $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x$. Ако $P(x)$ се дели точно на $x^2 - 1$, да се намерят коефициентите a и b.

Отговор: a=2, b=-1

13. Колко градуса е ъгълът, който сключва допирателната към графиката на функцията $f(x) = -x^3 + 2x + 1$ в точката с абсциса $x = -1$?

Отговор: -45

14. За полинома $P(x)$ е вярно, че $P(x) - P'(x) = x^2 - 5x + 2$. Намерете всички полиноми, които отговарят на условието.

Отговор: $x^2 - 3x - 1$

15. Сборът на първите 2025 члена на намаляваща аритметична прогресия е 28350. Деветстотин деветдесет и деветият, хиляда сто двадесет и седмият и хиляда и тринадесетият член, взети в този ред, са последователни членове на геометрична прогресия. Пресметнете първия член и разликата на аритметичната прогресия.

Отговор: $a_1 = \frac{902650}{3249}$ и $d = -\frac{847}{3249}$.

16. Дадени са матриците

$$A = \begin{pmatrix} 108 & 96 \\ 192 & 204 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -90 & -75 \\ 534 & 405 \end{pmatrix}.$$

Решете матричните уравнения, където X е квадратна матрица:

а) $AXA = C$;

б) $XAX = C$.

Отговор: а)

[-4399/15000, 1927/30000]

[4777/15000, -707/10000]

б)

[1/3, -1/2] [1/3, -1/2] [(7*2849^(1/2))/407, -2849^(1/2)/814] [-(7*2849^(1/2))/407, 2849^(1/2)/814]

[1, 3/2], [1, 3/2], [-(11*2849^(1/2))/259, -(9*2849^(1/2))/518], [(11*2849^(1/2))/259, (9*2849^(1/2))/518].

17. Изчислете границата $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}(A^n-E)\right)$,

където $A=\begin{pmatrix}1+\frac{2025x}{n} & \frac{45x}{n} & \frac{45x}{n}\\ \frac{45x}{n} & 1+\frac{2025x}{n} & \frac{45x}{n}\\ \frac{45x}{n} & \frac{45x}{n} & 1+\frac{2025x}{n}\end{pmatrix}$ и E е единичната матрица от трети ред.

Отговор: $\begin{bmatrix}2025 & 45 & 45\\ 45 & 2025 & 45\\ 45 & 45 & 2025\end{bmatrix}$

18. Да се пресметне интеграла $\int_0^{2025}\frac{\{x\}\cdot[x]}{506}\mathrm{d}x$, където $\{x\}$ е дробната част на x, $[x]$ е цялата на x.

Отговор: 2025

19. Да се намерят наредени двойки числа (x,y), удовлетворяващи условието $x<y$, които са решения на системата:

$$\begin{cases}\frac{2|x|-1}{5}+\frac{3y-2}{4}=2\\ \frac{3|x|+1}{5}-\frac{3y+2}{4}=0\end{cases}$$

Отговор: $(-3,2)$

20. Да се реши диференциалното уравнение при зададените начални условия:

$$y''-9y=x\sin 2x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$$

Отговор: $y(x)=\frac{2e^{-3x}}{169}-\frac{4\cos 2x}{169}+\frac{2e^{3x}}{169}-\frac{x\sin 2x}{13}$

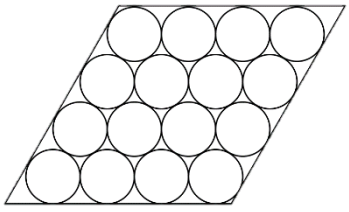
21. Да се определи за кои стойности на параметъра a функцията $f(x)=45.|x-2025|-a+x^2\ln(x^2+a^2)-(45+\ln(a^3-41a^2+551a-2430))|x-2025|$ е диференцируема за $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

Отговор: 11, 13, 17

22. Да се пресметне дължината на крива, зададена параметрично $x=\sin 2t$, $y=\cos t$, $z=t$, за $t\in[0,3\pi]$.

Отговор: 17.222

23. В ромб със страна a и ъгъл $\frac{\pi}{3}$ са вписани окръжности, както е показано на фигурата. Намерете $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S}$, където S е лицето на ромба, а S_n е сумата на лицата на $n-$ те вписани кръга.



Отговор: $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

24. Да се пресметне интеграла

$$\int_{-3}^{1}\int_{x+2|x|}^{3}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Отговор: $\frac{9}{2}\left(\cos(1)-\cos\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

25. Да се намери площта на фигурата, заградена от кривата $\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{9}\right)^4 = 4xy$.

Отговор: 1350

26. Дадени са точките A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,6), D(2,3,8). Да се намери обема на пирамидата ABCD и височината от върха D.

Отговор: $V = 14$, $h = \sqrt{14}$

27. Да се изчисли тройният интеграл

$$\int_0^{\pi}\int_0^{1}\int_{-1}^{1} (y\sin x + z\cos x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Отговор: $\pi^2 \sin 1$.

28. Каква е вероятността случайно избрано просто число в интервала $[0, 2025202]$ да се записва само с нечетни цифри?

Отговор: 5415/150679, закръглено 0.0359

29. Намерете стойността на определения интеграл

$$\int_0^{2025} \lim_{n\to\infty} x\sqrt{x^3\sqrt[4]{x^5\sqrt[6]{x^7\sqrt[8]{x^9\cdots\sqrt[2n]{x^{2n+1}}}}}}\,\mathrm{d}x.$$

Отговор: (2025*45^(4*exp(1/2)))/(2*exp(1/2) + 1), закръглено 3.7667e+13

30. Редицата от реални числа $\{a_i\}_{i=1}^{2025}$ се дефинира посредством

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{3}\sqrt{1+a_2^2} - \operatorname{arctg} a_1\,,$$

$$a_5 = \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{3}\sqrt{1+a_3^2} - \operatorname{arctg} a_2\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{2025} = \frac{1}{2}a_{2024} + \frac{1}{3}\sqrt{1+a_{2023}^2} - \operatorname{arctg} a_{2022}\,,$$

$$a_1 = \frac{1}{2}a_{2025} + \frac{1}{3}\sqrt{1+a_{2024}^2} - \operatorname{arctg} a_{2023}\,,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}\sqrt{1+a_{2025}^2} - \operatorname{arctg} a_{2024}\,,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}\sqrt{1+a_1^2} - \operatorname{arctg} a_{2025}\,.$$

Да се намерят елементите на редицата $\{a_i\}_{i=1}^{2025}$.

Отговор: Всички елементи са равни на 0.230704107077081246067192335529 72

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се точност на използваната система за компютърна математика, освен ако в условието на задачата не е указано друго.
Всяка задача се оценява с 2 точки.