ДВАНАДЕСЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА

ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ

14-16 НОЕМВРИ 2025 г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА Б

1. Пресметнете израза

$$\sqrt[5]{\frac{x^2}{x+y}+\frac{xy}{y^2-1}}.$$

при $x=-2.5$ и $y=-1.2$ с точност до 10 верни знака след десетичната запетая.

2. Да се реши уравнението (a е параметър):

$$\begin{vmatrix} a & x & x & x & x \\ x & a & x & x & x \\ x & x & a & x & x \\ x & x & x & a & x \\ x & x & x & x & a \end{vmatrix} = 0.$$

3. Преобразувайте числото $362C_{(13)}$ от тринадесетична в десетична бройна система.

4. Намерете сбора от коефициентите на полинома

$$(6x^5-5x^4+4x^3-3x^2+x-4)^{2025}.$$

5. Да се пресметне сумата

$$\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{2}{2021\cdot 2023}+\frac{2}{2023\cdot 2025}.$$

6. Да се реши уравнението:

$$|x-3|^{x+5}=1.$$

7. Да се намерят стойностите на реалните параметри a и b, ако е известно, че $1+i$ е нула на полинома $p(x)=3x^4-5x^3+3x^2+ax-b$. За намерените стойности на параметрите да се разложи полиномът на прости множители.

8. За кои стойности на реалния параметър m функцията $f(x)=x^3+mx^2+4x+3$ има локален максимум в $x=-2$?

9. Даден е полиномът $P=\sum_{i=1}^{n}(2x-3)^{p_i}$, където $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ е редицата на простите числа, по-малки от 2025, а n е техният брой. Да се намери коефициентът пред x^2 в нормалния вид на P.

10. Избират се 16 калцуна от кош, който съдържа 8 пробити калцуна. Вероятността да се изберат всичките 8 пробити калцуна е 10 пъти по-голяма от вероятността всичките избрани калцуни да са здрави (непробити). Колко калцуна има в коша?

11. Разпределението на дискретната случайна величина X се дава със следната таблица. Да се намери стойността на y, ако $\mathbb{E}X^2=\frac{4}{3}$.

x_i	y	1	$\sqrt{2y}$
$P(X=x_i)$	$1/9$	$5/9$	$1/3$

12. Даден е полиномът $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x$. Ако $P(x)$ се дели точно на $x^2 - 1$, да се намерят коефициентите a и b.

13. Колко градуса е ъгълът, който сключва допирателната към графиката на функцията $f(x) = -x^3 + 2x + 1$ в точката с абсциса $x = -1$?

14. За полинома $P(x)$ е вярно, че $P(x) - P'(x) = x^2 - 5x + 2$. Намерете всички полиноми, които отговарят на условието.

15. Сборът на първите 2025 члена на намаляваща аритметична прогресия е 28350. Деветстотин деветдесет и деветият, хиляда сто двадесет и седмият и хиляда и тринадесетият член, взети в този ред, са последователни членове на геометрична прогресия. Пресметнете първия член и разликата на аритметичната прогресия.

16. Дадени са матриците

$$A = \begin{pmatrix} 108 & 96 \\ 192 & 204 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -90 & -75 \\ 534 & 405 \end{pmatrix}.$$

Решете матричните уравнения, където X е квадратна матрица:

а) $AXA = C$;

б) $XAX = C$.

17. Изчислете границата $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}(A^n - E)\right)$,

където $A = \begin{pmatrix} 1+\frac{2025x}{n} & \frac{45x}{n} & \frac{45x}{n} \\ \frac{45x}{n} & 1+\frac{2025x}{n} & \frac{45x}{n} \\ \frac{45x}{n} & \frac{45x}{n} & 1+\frac{2025x}{n} \end{pmatrix}$ и E е единичната матрица от трети ред.

18. Да се пресметне интеграла $\int_0^{2025} \frac{\{x\}\cdot[x]}{506}\mathrm{d}x$, където $\{x\}$ е дробната част на x, $[x]$ е цялата на x.

19. Да се намерят наредени двойки числа (x,y), удовлетворяващи условието $x < y$, които са решения на системата:

$$\begin{cases} \frac{2|x|-1}{5} + \frac{3y-2}{4} = 2 \\ \frac{3|x|+1}{5} - \frac{3y+2}{4} = 0 \end{cases}$$

20. Да се реши диференциалното уравнение при зададените начални условия:

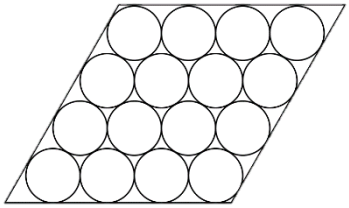
$$y'' - 9y = x\sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

21. Да се определи за кои стойности на параметъра a функцията

$f(x) = 45.|x - 2025| - a + x^2\ln(x^2 + a^2) - (45 + \ln(a^3 - 41a^2 + 551a - 2430))|x - 2025|$ е диференцируема за $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

22. Да се пресметне дължината на крива, зададена параметрично $x = \sin 2t$, $y = \cos t$, $z = t$, за $t \in [0, 3\pi]$.

23. В ромб със страна a и ъгъл $\frac{\pi}{3}$ са вписани окръжности, както е показано на фигурата. Намерете $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S}$, където S е лицето на ромба, а S_n е сумата на лицата на $n-$ те вписани кръга.



24. Да се пресметне интегралът

$$\int_{-3}^{1}\int_{x+2|x|}^{3} sin\left(\frac{x}{y}\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

25. Да се намери площта на фигурата, заградена от кривата $\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{9}\right)^4 = 4xy$.

26. Дадени са точките A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,6), D(2,3,8). Да се намери обема на пирамидата ABCD и височината от върха D.

27. Да се изчисли тройният интеграл

$$\int_0^{\pi}\int_0^{1}\int_{-1}^{1} (y\sin x + z\cos x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

28. Каква е вероятността случайно избрано просто число в интервала $[0, 2025202]$ да се записва само с нечетни цифри?

29. Намерете стойността на определения интеграл

$$\int_0^{2025} \lim_{n\to\infty} x\sqrt{x^3\sqrt[4]{x^5\sqrt[6]{x^7\sqrt[8]{x^9\ldots\sqrt[2n]{x^{2n+1}}}}}}\,\mathrm{d}x.$$

30. Редицата от реални числа $\{a_i\}_{i=1}^{2025}$ се дефинира посредством

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{3}\sqrt{1+a_2^2} - \operatorname{arctg} a_1\,,$$

$$a_5 = \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{3}\sqrt{1+a_3^2} - \operatorname{arctg} a_2\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{2025} = \frac{1}{2}a_{2024} + \frac{1}{3}\sqrt{1+a_{2023}^2} - \operatorname{arctg} a_{2022}\,,$$

$$a_1 = \frac{1}{2}a_{2025} + \frac{1}{3}\sqrt{1+a_{2024}^2} - \operatorname{arctg} a_{2023}\,,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}\sqrt{1+a_{2025}^2} - \operatorname{arctg} a_{2024}\,,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}\sqrt{1+a_1^2} - \operatorname{arctg} a_{2025}\,.$$

Да се намерят елементите на редицата $\{a_i\}_{i=1}^{2025}$.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се точност на използваната система за компютърна математика, освен ако в условието на задачата не е указано друго.
Всяка задача се оценява с 2 точки.