ПЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“
ВЕЛИКОТЪРНОВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЙ“
28-30 ОКТОМВРИ 2016 Г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

1. Покажете, че целите части на числата $\sqrt{2016+\sqrt[3]{2016}}-\sqrt[3]{2016+\sqrt[4]{2016}}$ и $\sqrt{2016+\sqrt[3]{2016}}-\sqrt[3]{2016+\sqrt[4]{2016}}-\sqrt[4]{2016+\sqrt[5]{2016}}$ са точни степени на естествени числа.
   Отговор: 32; 25.

2. Да се пресметне стойността на израза $\frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ}$.
   Отговор: 1.

3. Да се опрости изразът $\left(\frac{\left(a^{\frac{3}{2}}-\sqrt{8}\right)(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}$, където a е реално число.
   Отговор: $(\mathrm{a}-2)^2+|\mathrm{a}^2-2|$.

4. Да се намерят корените на полинома $f(x)=x^3-681x+2016$ с точност 10 знака след десетичната запетая.
   Отговор: 3; -27.4663243452; 24.4663243452

5. Да се пресметне стойността на $x^3-2ix^2+3x-1+2i$ ако $x=3-2i$.
   Отговор: $-25-60i$

6. Да се намерят всички решения в естествени числа на уравнението $x^3+y^3+z^3=t^3$, за които $x\le y\le z\le t\le 24$.
   Отговор: (1,6,8,9),(2,12,16,18),(3,4,5,6),(3,10,18,19), (6,8,10,12),(7,14,17,20),(9,12,15,18),(12,16,20,24)

7. Да се намери мултипликативният обратен на полинома $1+x^2+x^3$ по модул $(1+x^2+x^5)$ над полето $\mathbb{Z}_2$ (т.е. полином $g(x)$, такъв че $g(x)(1+x^2+x^3)=1\ (mod\ 1+x^2+x^5)$ над $\mathbb{Z}_2$).
   Отговор: $1+x+x^2+x^3$

8. За кои стойности на естественото число $n, n<55$, полиномът $x^{2n}+16x^n+8n$ може да се разложи на множители с цели коефициенти?
   Отговор: 6; 8; 32.

9. Да се докаже, че $\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\cdots+\frac{85^{85}}{86^{86}}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{85^2}$,
   но $\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\cdots+\frac{85^{85}}{86^{86}}+\frac{86^{86}}{87^{87}}>1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{85^2}+\frac{1}{86^2}$.

10. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x)=\begin{vmatrix} 2 & x & x^2 & x^3 \\ x & 0 & x & x^2 \\ x^2 & x & 1 & x \\ x^3 & x^2 & x & 4 \end{vmatrix}$ в интервала $[0,2016]$.

Отговор: $-134268016909622980608; 9$.

11. Дадени са функцията $f(x)=x^5-2x^3-11$ и матрицата $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Да се пресметне $f(A)$.

Отговор: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 37 & 0 & 26 \\ 26 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

12. Да се реши системата от матрични линейни уравнения

$$\begin{vmatrix} (I+J)X+\left(2I+\sqrt{3}J\right)Y & = & \left(2+\sqrt{3}\right)I+5J \\ \left(\sqrt{3}I-J\right)X+\left(I+\sqrt{3}J\right)Y & = & \left(1-\sqrt{3}\right)\left(I+\sqrt{3}J\right) \end{vmatrix}, \text{ където } I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отговор: $X=\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 8-\sqrt{3} \\ 8-\sqrt{3} & 3\sqrt{3} \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} -6+\sqrt{3} & -3+2\sqrt{3} \\ -3+2\sqrt{3} & -6+\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

13. Дадени са матриците $A_n=\begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{pmatrix}, n\in\mathbb{N}$.

Да се намери коефициентът пред x^{2014} в развитието на $\det A_{2016}$.

Отговор: 2031120

14. Да се намерят реалните корени на уравнението $e^x=x^4$.

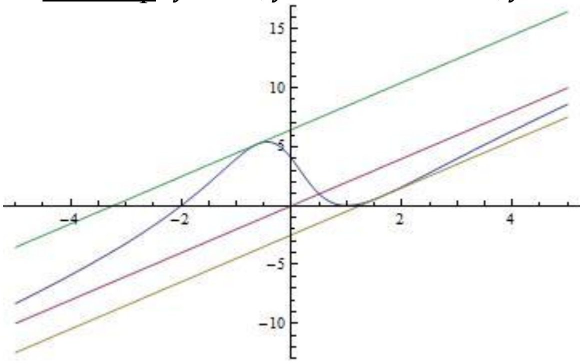
Отговор: -0.815553; 1.42961; 8.61317

15. Да се намерят корените и локалните екстремуми на функцията $f(x)=2+x^3-x-\sin x$.

Отговор: Корен x=-1.67102; f(0.758481)=0.990049; f(-0.758481)=3.00995.

16. Да се намери уравнението на асимптотата на функцията $y=2x-\frac{8x-4}{x^2+1}$. Да се намерят уравненията на допирателните към графиката на функцията, които са успоредни на асимптотата. На една и съща координатна система да се начертаят графиката на функцията, асимптотата и допирателните.

Отговор: $y=2x, y=2x+2-2\sqrt{5}, y=2x+2+2\sqrt{5}$.



17. Правата с уравнение $x+y=2$ разделя площта на фигурата, оградена от кривата с уравнение $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ на две части. Да се изчисли лицето на по-малката част. Направете чертеж.

Отговор: $\pi-2$.

18. Ъгловият коефициент k на функцията $f(x)$ в точката x се изразява с равенството $k=4x^3-3\sqrt{x}$. Да се определи $f(x)$, ако точката $M(1,0)$ лежи на графиката ѝ. Да се начертаят графиката на функцията и допирателната към графиката в точката M.

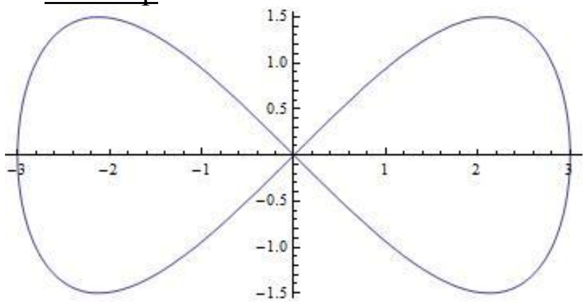
Отговор: $f(\mathrm{x})=-2x^{3/2}+x^4+1$.

19. Дадена е функцията $f(x) = e^x \cos x$. Да се докаже, че частното $f^{(256)}(x)/f(x)$ между 256-та производна производна и функцията е точна степен на просто число.

Отговор: Частното е 2^{128}.

20. Да се начертае графиката на кривата, зададена с параметрични уравнения:
$x = 3\sin t, \quad y = 3\sin t \cos t$. Да се намери лицето на фигурата, заградена от тази крива.

Отговор: S=12



21. Да се намери естествено число n, за което $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{n(n+1)(n+2)}} = \frac{508788}{2035153}$.

Отговор: $n = 2016$.

22. Да се пресметне лицето на фигурата, зададена с неравенствата $x^4 + y^4 \le 1, \;\; x^3 \le y^2$.

Отговор: 2.97146638485634803588

23. Да се пресметне $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{20^k}{k!} - \frac{16^k}{(k-1)!}\right)$.

Отговор: $-1 - 16e^{16} + e^{20}$

24. Да се пресметне $\int_{10}^{29} \frac{x^2}{\sin x + 2016} dx$.

Отговор: 3.8671

25. Да се намери лицето на фигурата, заградена от графиките на функциите $f(x) = e^{1-|x|}$ и $g(x) = e^{2-x^2}$. Да се намери обемът на ротационното тяло, получено при въртенето на графиката на $f(x)$ около оста Ox.

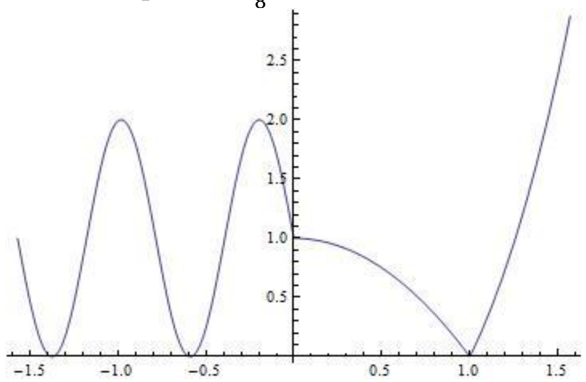
Отговор: S=8.44846, $V = e^2\pi$.

26. Да се докаже, че $2\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}\right)^2 = 5\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4}\right)$.

27. Да начертае графиката и да се намери най-голямата стойност на функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sin 8x, & x < 0 \\ 1 - x^2, & 0 \le x < 1 \\ x^3 - 1, & 1 \le x \end{cases} \quad \text{в интервала } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Отговор: $-1 + \frac{\pi^3}{8}$.



28. Дадена е редицата $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_\mathrm{n} = 2{a_{n-1}}^2 - k\,{a_{n-2}}^2 - 2016$, $n > 2$, където k е естествено число. Да се намери най-малката стойност на k, за която $a_4 < 8000000$.

Отговор: Няма такова естествено число.

Забележка: За дадената редица $a_4 < 8000000$ за целите числа k в интервала $[-4006, -8]$. Ако редицата е $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_\mathrm{n} = 2{a_{n-1}}^2 - k\,{a_{n-2}}^2 + 2016$, $n > 2$, най-малкото естествено число k, за което $a_4 < 8000000$, е 25.

29. Измежду първите 20160 прости числа да се намерят тези, в десетичния запис на които се среща последователността 2016.

Отговор: 20161,120163, 120167, 220163, 220169, 201611, 201623, 201629, 201653, 201661, 201667, 201673, 201683.

30. Да се намери най-малкото естествено число n, за което $100^n < n!$. Кое е по-голямо: 100^{300} или 300! ?

Отговор: 269.

Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се за съответната система за компютърна математика точност.