СЕДМА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА

ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ

26-28 ОКТОМВРИ 2018 г.

ЗАДАЧИ и ОТГОВОРИ ЗА ГРУПА В

1. Да се пресметне сумата $\frac{1^0}{2^1}-\frac{2^1}{3^2}+\frac{3^2}{4^3}-\frac{4^3}{5^4}+\ldots-\frac{2018^{2017}}{2019^{2018}}$

Отговор: 0.3603422031901725

2. Да се реши уравнението $\begin{vmatrix} 1 & 2018 & 2018 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

Отговор: 0.0002475251163 $\pm$ 0.02225384901 i

-1.000991082; -2016.999504

3. Да се реши уравнението $x^x = 2018$

Отговор: 4.83130244134788547267

4. Да се намери дължината на кривата $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin\sqrt{x}$

Отговор: 2

5. От кабел с дължина $L = 100$ см е отрязана част с дължина x, която е огъната във формата на окръжност. Останалата част е огъната във формата на квадрат. Намерете минимума на сумата от лицата на получените кръг и квадрат.

Отговор: $x = \frac{100\pi}{\pi+4}$, $Fmin = \frac{2500}{\pi+4}$

6. Да се намери сумата на първите 100 прости числа.

Отговор: 24133

7. Ако x, y и a са реални числа, така че $x+y=2a-1$ и $x^2+y^2=a^2+2a-1$, да се намери най-малката стойност на функцията $f(a) = xy$.

Отговор: -1/2

8. Намерете всички решения в естествени числа на диофантовото уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{2}.$$

Отговор: (3,4,35), (3,5,16), (3,6,9), (3,7,5), (4,1,15), (4,2,6)

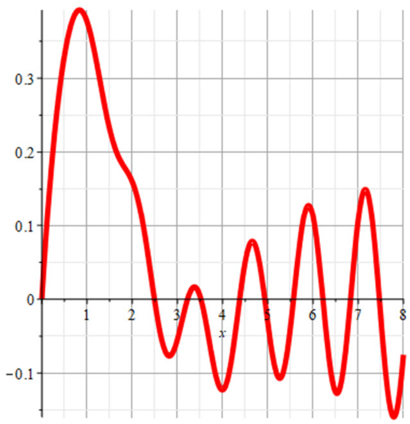
9. Намерете обема на ротационно тяло, получено от завъртането около оста *Ox* на областта, ограничена от линиите $y = 1/(1+x^2)$ и $y = 0$.

Отговор: $\frac{\pi^2}{2}$

10. Функцията $y(x)$ е решение на диференциалното уравнение $2y'' + 3y' + 4y = x.\sin(5x)$

при начални условия: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Да се построи графиката на функцията $y(x)$ за $x \in [0,8]$

Отговор:



11. Да се пресметне сумата $1+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$.

Отговор: $\frac{41054655}{739024}$

12. Дефинирайте функцията $f(x)=\begin{cases}\frac{10}{1+x^2}, x>3\\ \frac{x^2}{9}, 0<x\le 3\\ 1-e^x, x\le 0\end{cases}$. Пресметнете f(-1), f(1), f(2), f(3), f(5).

Намерете минимума и максимума на функцията.

Отговор: $\{1-\frac{1}{e}, 0.6321205588285577\}$, $\{\frac{1}{9}, 0.1111111111111111\}$, $\{\frac{4}{9}, 0.4444444444444444\}$, $\{1, 1.\}$, $\{\frac{5}{13}, 0.38461538461538464\}$. Минимум 0 в 0 и максимум 1 в 3.

13. Намерете обема на тялото, образувано от ротацията на кривата

$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$, около вертикалната ѝ асимптота.

Отговор: $2\pi^2 a^3$

14. Дадена е 10x10 матрицата $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \begin{cases} i+j-1, & \text{ако } i+j \leq 11 \\ 21-i-j, & \text{ако } i+j > 11 \end{cases}$. Да се пресметне детерминантата на матрицата A.

Отговор: -2816

15. Намерете броя на всички диагонални матрици от трети ред, които нулират полинома $F(A) = A^3 - 3A + 2I_3$, където I_3 е единичната матрица от ред 3.

Отговор: Осем матрици с диагонални елементи

[-2, -2, -2], [-2, -2, 1], [-2, 1, 1], [1, 1, 1], [1, 1, -2], [1, -2, 1], [-2, 1, -2], [1, -2, -2]

16. Дадена е редицата $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ при $n \geq 4$.
Да се пресметне сумата на първите 25 члена на тази редица.
Отговор: 4700769.

17. Кое е най-малкото N, за което $N^{2018} < N!$?
Отговор: 2317.

18. Да се намери лицето на фигурата, оградена от кривата, зададена с уравнението $y^2 = x^3(2-x)$, $0 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$.

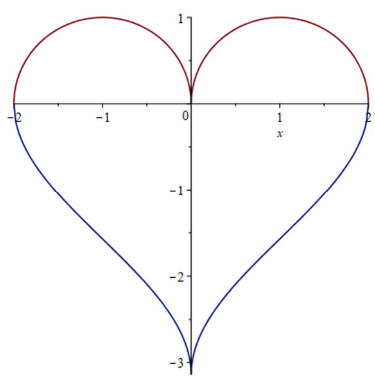
Отговор: π.

19. Намерете най-голямата стойност на функцията $f(x) = \cfrac{2018}{x + \cfrac{2018}{x + \cfrac{2018}{x + \cfrac{2018}{x + \cfrac{2018}{x+2018}}}}}$ в интервала $[0,2018]$.

Отговор: 29.08175692

20. Да се намерят всички реални решения на уравнението $5\cos x = 4 - x^3$.
Отговор: -0.576574, 0.797323, 1.61805

21. Да се начертаят на един чертеж графиките на функциите $y = \sqrt{1-(1-|x|)^2}$ и $y = \arccos(1-|x|) - \pi$. Да се намери лицето на фигурата, заградена от двете графики.

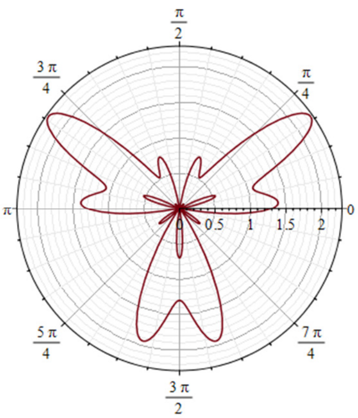


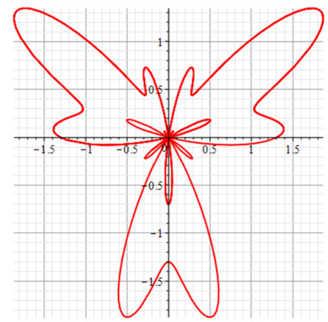
Отговор: 3π

22. За редицата на Фибоначи $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \geq 3$, да се пресметне сумата от цифрите на a_{100}.
Отговор: 93

23. Да се начертае в полярна координатна система $O\rho\theta$ кривата $\rho = \rho(\theta)$, ако е известно, че $\rho'(\theta) + 10.\cos(5.\theta).\sin(5.\theta) - 3.\cos(3.\theta) = 0$ и $\rho(0) = 1,3$.

Отговор: $r(\theta) = \frac{1}{2}\cos(10\,\theta) + \sin(3\,\theta) + \frac{4}{5}$





24. Да се намери обемът на тялото, дефинирано като общата част на вътрешностите на сферата, зададена с уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ и конуса, зададен с уравнение $3y^2 = x^2 + z^2, y \geq 0.$
Отговор: $\frac{64}{3}\pi$

25. Да се пресметне максималната стойност на израза $a^2 + b^2$, където a и b са цели числа в интервала [1,2018], за които е изпълнено $(a^2 - ab - b^2)^2 = 1.$
Отговор: 3524578

26. Намерете границата $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{x}{1+2018^x} dx.$
Отговор: $\frac{\pi^2}{12\mathrm{Log}[2018]^2} = 0.014202503796191188347...$

27. Представете x^5 като полином на $x - 2$.
Отговор: $(x-2)^5 + 10(x-2)^4 + 40(x-2)^3 + 80(x-2)^2 + 80(x-2) + 32$

28. Да се реши уравнението $e^{x^6} - 2018x^4 + 1 = 0.$
Отговор: $-0.1774307557, 0.1774307557, -1.444391655, 1.444391655$
Функцията е четна и има 4 корена.

29. Да се начертаят графиките на функциите $f(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 20$ и $g(x) = x^2$ и да се намерят координатите на пресечните им точки.

Отговор: $(2{,}4); \left(3-\sqrt{19},\ 28-6\sqrt{19}\right), \left(3+\sqrt{19},\ 28+6\sqrt{19}\right)$
$(2{,}4); (-1.358889844, 1.846606340); (7.358898944{,}54.15339367)$

30. Да се намери най-малката стойност на цялото число n, за която поне един от множителите (полиноми), на които се разлага полиномът $x^n - 1$, съдържа коефициент, различен от 1 и -1.
Отг. 105