ДЕСЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА
ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“
РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“, 10-12 НОЕМВРИ 2023 Г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

1. За функцията $f(x)$ означаваме $f_1(x) = f(x),\ f_{k+1}(x) = f\big(f_k(x)\big),\ k = 1, 2, \ldots$ Да се начертаят графиките на функциите $f(x),\ f_{20}(x),\ f_{40}(x)$ и $f_{50}(x)$, ако $f(x) = \sin x$ за $0 \le x \le 6\pi$.

2. Да се намери полином $p(x)$ от трета степен с рационални коефициенти, такъв че
$$p\big(\sqrt{2}+\sqrt{3}\big) = \sqrt{2}.$$

3. Да се намери броят на всички решения в естествени числа (по-малки от 10) на уравнението
$$x^{2023} + y^{2023} \equiv z^{2023} (mod\ 10).$$

4. Да се пресметнат $f(20), f(23)$ и $f(2023)$, ако
$$f(n) = \begin{cases} n-3 & \text{за } n \ge 2320, \\ f(f(n+6)) & \text{за } n < 2320. \end{cases}$$

5. Известно е, че всяко естествено число n може да се представи по единствен начин във факториелна бройна система: $n = a_m m! + a_{m-1}(m-1)! + \cdots + a_2 2! + a_1 1!$.
Например, $46_{10} = 1.4! + 3.3! + 2.2! + 0.1! = 1320_!$
Намерете коефициентите на числото 2023 във факториелна бройна система. Намерете последните 9 коефициента $a_9,\ a_8, \ldots, a_1$ на числото 10^{2023} във факториелна бройна система.

6. Да се намери най-голямото естествено число n, за което 2023^n дели без остатък $2023!$.

7. Да се намерят най-малките три положителни решения на уравнението $\operatorname{tg} x = x + 1$.

8. Да се пресметне границата $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k\sqrt{k+n}}{k.n+1}$.

9. Да се пресметне лицето на сечението на вътрешностите на елипсите с уравнения
$$\left(\frac{x}{20}\right)^2 + \left(\frac{y}{23}\right)^2 = 1, \qquad \left(\frac{x}{23}\right)^2 + \left(\frac{y}{20}\right)^2 = 1.$$

10. Да се намерят всички прости числа p, за които първото съставно число в редицата $a_n = n^2 + n + p,\ n = 0, 1, 2, \ldots, 2023,$ е числото a_{p-1}.

11. Дадена е елипса с уравнение $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$. Отсечка AB има за среда точката $M(2,3)$, а краищата ѝ лежат върху елипсата. Намерете дължината на отсечката AB.

12. Колко са естествените числа $n \leq 2023$, такива че $n^{2023} + 2023$ е просто число.

13. Да се реши системата уравнения $x^y = 20$, $y^x = 23$.

14. Нека p и q са естествени числа. Колко от уравненията $x^2 - px - q = 0$ имат положителен реален корен, не превишаващ 6?

15. Дадена е матрицата $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Да се намерят собствените стойности на матрицата $B = A^4(2A^T - 3E)$, където матрицата A^T е транспонираната на A и E е единичната матрица от ред 4.

16. Колко последователни нули след десетичната точка има в записа на числото $\left(2 - \sqrt{3}\right)^{100}$?

17. Да се намерят реалните корени на уравнението $\det(Ax + E) = 0$, където A е квадратна матрицата от 23-ти ред с елементи $a_{ij} = i.j$, $1 \leq i \leq 23$, $1 \leq j \leq 23$, и E е единичната матрица от 23-ти ред.

18. Иван решил да генерира редица от прости числа, основана на доказателството на Евклид, че броят на простите числа е безкраен. Иван положил $p_1 = 2$ и итеративно, при намерени $p_1, p_2, \dots, p_n$ дефинирал p_{n+1} като най-малкия прост делител на числото $1 + p_1 p_2 \dots p_n$. Да се намери p_{15}.

19. Да се намери броят на числата в редицата $a_n = n^2 + 20^n + 23^n$ за $n = 1,2, \dots, 2023$, които са кратни на 2023.

20. Да се намери центърът на тежестта на множеството от всички точки M с целочислени координати такива, че $M \in \Omega \backslash \Phi$, където:

- Ω е прав кръгов конус с връх в $O(0,0,0)$, радиус на основата $r = 8$ и височина OH, където $H(0,10,0)$;
- Φ е кълбо с център в точката $C(1,7,-1)$ и радиус $\rho = 3$.

21. Кои са естествените числа k, $6 \leq k \leq 100$, такива че и двете числа 2023_k и 2025_k (k-ична основа) са прости?

22. Да се докаже, че a_k е точен квадрат за всяко естествено число k, където

$$a_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{\sum_{i=1}^{3n+1} i^2}{\sum_{i=1}^{3n+1} i}$$

23. Даден е квадрат $ABCD$ с върхове $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$. Да се намери уравнението на права, сключваща ъгъл 60^o с положителната посока на абсцисата, пресичаща страната AB и разделяща квадрата на части, чиито лица са в отношение 1:7.

24. Да се намерят асимптотите на функцията $f(x) = (3x - 7)\, arctg\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

25. Да се реши уравнението $x + |\sin(x - 1)| = 5$.

26. Едно естествено число n наричаме точна степен, ако съществуват естествени числа a и b такива, че $a \geq 2$, $b \geq 2$ и $n = a^b$. Да се намери броят на точните степени n, които са по-малки от 20232023.

27. Да се начертае кривата, зададена параметрично:

$$x(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad y(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) dt, \qquad -12 \le t \le 12.$$

28. Да се реши уравнението $x^2 + x + 1 = 3y^2$ в цели положителни числа по-малки от 2023.

29. Даден е тетраедър *ABCD* с върхове $A(10,4,1)$, $B(1,12,3)$, $C(4,2,11)$ и $D(0,3,9)$. Да се намерят координатите на точка *M*, за която сборът от квадратите на дължините на перпендикулярите от *M* до стените на тетраедъра е най-малък.

30. Да се начертаят кривите с уравнения в полярни координати $r(t) = \sin(\frac{k+1}{k}t)$ за $k = 1, 4, 7, 10$.

Време за работа: 4 часа Всяка задача се оценява с 2 точки.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се точност на използваната система за компютърна математика.