ДЕСЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА

ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“

10-12 НОЕМВРИ 2023 Г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА В

1. Решете интегралите а) $\int (x-4)e^x dx$ б) $\int_2^4 \frac{x+1}{x+2} dx$

2. Хесиан на функцията $f(x,y)$ се нарича матрицата от частните производни $H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$. Пресметнете Хесиана на функцията $f(x,y) = x^2 \sin y$ в точката $(1, \frac{\pi}{2})$.

3. Решете диференциалното урвнение $y'' - 4y' + 3y = 0$.

4. Дадени са точките $A(2,-1,1), B(5,5,4)$ и $C(3,2,-1)$. Намерете дължината на медианата AM през върха върха A и дължината на височината CH през върха C на ΔABC.

5. Да се построи графиката на функцията $f(x) = e^{-0.5x} \sin 5x$ в интервала $[0, 2\pi]$.

6. Дадени са точките $A(12,-4), B(-12,-11)$ и $M(0,5)$. Намерете координатите на точка N, симетрична на точката M относно правата AB.

7. Да се намери пресечната точка на правите

$$a: \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1} \quad \text{и} \quad b: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}.$$

8. Да се направи чертеж в подходящ интервал на графиката на функцията $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$ и на нейната допирателна в точката $M(2,1)$.

9. Числото “гугол” се записва с една единица, последвана от 100 нули: $1\underbrace{0\,0\,0\ldots0}_{100}$.

Да се намери най-малкото n, за което $n! > 1$ гугол.

10. Да се намери най-голямото просто число, което е делител на числото $10^{100}+1$.

11. Да се докаже, че функцията $y = e^{2\arcsin x}$ удовлетворява диференциалното уравнение $(1-x^2)y'' - xy' - 4y = 0$.

12. Да се намерят координатите на точка M от графиката на функцията $f(x) = 4 - x^2$, в която допирателната е успоредна на хордата AB, където $A(-2,0)$, $B(1,3)$. Направете чертеж.

13. Да се намери дължината на дъгата AB от кривата $y = -\ln\sin x$, където $A(\frac{\pi}{6}, \ln 2)$ и $B(\frac{\pi}{2}, 0)$.

14. Да се намери лицето на ротационната повърхнина, получена при въртенето на кривата $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$ около оста Ox.

15. Да се намери лицето на фигурата, ограничена от линиите $y = (x-1)^2$ и $y^2 = x - 1$.

16. Нека D е фигурата, ограничена от кривата $y = -x^2 + 6x - 5$ и абсцисната ос. Да се намери обемът на ротационното тяло, получено при въртенето на D около абсцисната ос.

17. Да се докаже, че функцията $z = \frac{y^2}{3x} + \sin^2(xy)$ удовлетворява диференциалното уравнение $x^2.z'_x - xy.z'_y + y^2 = 0$.

18. Дадени са равнина $\alpha: 4x - 2y + z - 1 = 0$ и точка $M(-2,-1,5)$. Да се намери точка H от равнината α, за която разстоянието MH е възможно най-малко.

19. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на функцията

$f(x,y) = xy + x^2 - 2y$ в областта $D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$.

20. Да се намери лицето на ΔABC, ако $A(2,-3)$, $B(6,0)$ и $C(3,7)$.

21. Да се намери неизвестната матрица X от матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.X.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

22. Да се намерят корените на уравнението $5\cos 2x = 3\ln x$.

23. Да се реши системата $\begin{cases} |x-1| + |y+2| = 8 \\ |x+3| + |y-6| = 10 \end{cases}$.

24. Намерете обиколката на елипсата $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

25. Даден е затворен контур, състоящ се от правоъгълник с дължини на страните a и b, като вместо едната от страните с дължина a е начертана външно полуокръжност с диаметър равен на a. Зададен е периметърът на контура $P = \text{const}$. Определете стойностите на a и b, осигуряващи максимум на заградената от контура площ S, а така също и максималната стойност на S.

26. Нека M_n е множеството от числата, които са записани само с цифри 1 и 2, няма две двойки непосредствено една след друга и сборът на всички цифри е равен на n. Например $M_5 = \{212, 1112, 1121, 1211, 2111, 11111\}$, $|M_5| = 6$ $M_6 = \{1212, 2112, 2121, 11112, 11121, 11211, 12111, 21111, 111111\}$, $|M_6| = 9$. Намерете стойността на $|M_{125}|$, т.е. броя на елементите в множеството M_{125}.

27. Пресметнете интеграла $\iiint_D e^{-(x+y^2+z^3)} dxdydz$, където $D: \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

28. Решете диференциалното уравнение $y'' + 5y' + 6y = 0$ при начални условия $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$.

29. Намерете сумата на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{a^n} x^n$ при $|x| < a$.

30. Решете ребуса $\overline{324a} \,.\, a = \overline{292b1}$, където a и b са неизвестни цифри.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се точност на използваната система за компютърна математика.

Всяка задача се оценява с 2 точки.