ДЕСЕТА НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА

ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“

10-12 НОЕМВРИ 2023 Г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА В

Всяка задача се оценява с 2 точки

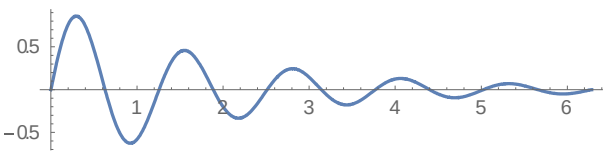
1. Решете интегралите а) $\int (x-4)e^x dx$ б) $\int_2^4 \frac{x+1}{x+2} dx$ $e^x(-5+x), 2 - \text{Log}[\frac{3}{2}]$

2. Хесиан на функцията $f(x,y)$ се нарича матрицата от частните производни $H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$. Пресметнете Хесиана на функцията $f(x,y) = x^2 \sin y$ в точката $(1, \frac{\pi}{2})$.
$\begin{pmatrix} 2. & 0. \\ 0. & -1. \end{pmatrix}$

3. Решете диференциалното урвнение $y'' - 4y' + 3y = 0.$ $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$

4. Дадени са точките $A(2,-1,1), B(5,5,4)$ и $C(3,2,-1)$. Намерете дължината на медианата AM през върха върха A и дължината на височината CH през върха C на ΔABC. $\frac{7}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{59}{6}}$

5. Да се построи графиката на функцията $f(x) = e^{-0.5x} \sin 5x$ в интервала $[0, 2\pi]$.

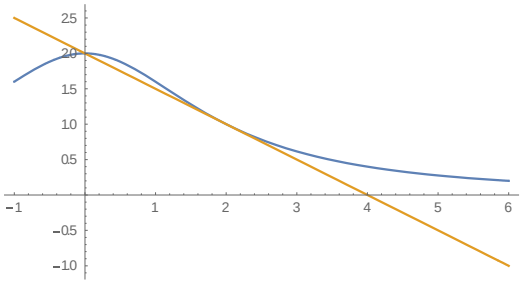


6. Дадени са точките $A(12,-4), B(-12,-11)$ и $M(0,5)$. Намерете координатите на точка N, симетрична на точката M относно правата AB. $\{\frac{168}{25}, -\frac{451}{25}\}$

7. Да се намери пресечната точка на правите

$$a: \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1} \quad \text{и} \quad b: \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}. \qquad \{-1,3,1\}$$

8. Да се направи чертеж в подходящ интервал на графиката на функцията $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$ и на нейната допирателна в точката $M(2,1)$.



9. Числото "гугол" се записва с една единица, последвана от 100 нули: $1\underbrace{0\,0\,0\ldots0}_{100}$.

Да се намери най-малкото n, за което $n! > 1$ гугол. 70

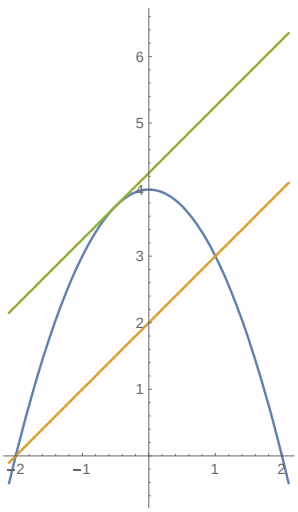
10. Да се намери най-голямото просто число, което е делител на числото $10^{100} + 1$.

1296944190290577505513857711845642744990757009476567578215372915271968 01

11. Да се докаже, че функцията $y = e^{2\arcsin x}$ удовлетворява диференциалното уравнение $(1-x^2)y'' - xy' - 4y = 0$.

12. Да се намерят координатите на точка M от графиката на функцията $f(x) = 4 - x^2$, в която допирателната е успоредна на хордата AB, където $A(-2,0)$, $B(1,3)$. Направете чертеж.

$M(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$



13. Да се намери дължината на дъгата AB от кривата $y = -\ln\sin x$, където $A(\frac{\pi}{6}, \ln 2)$ и $B(\frac{\pi}{2}, 0)$.

$2\text{ArcCoth}[\sqrt{3}] \approx 1.316957896924817$

14. Да се намери лицето на ротационната повърхнина, получена при въртенето на кривата $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$ около оста Ox. $2(-\frac{4}{3} + \pi)\pi$

15. Да се намери лицето на фигурата, ограничена от линиите $y = (x-1)^2$ и $y^2 = x - 1$. $\frac{1}{3}$

16. Нека D е фигурата, ограничена от кривата $y = -x^2 + 6x - 5$ и абсцисната ос. Да се намери обемът на ротационното тяло, получено при въртенето на D около абсцисната ос.

$\frac{512\pi}{15}$

17. Да се докаже, че функцията $z = \frac{y^2}{3x} + \sin^2(xy)$ удовлетворява диференциалното уравнение $x^2.z'_x - xy.z'_y + y^2 = 0$.

18. Дадени са равнина $\alpha: 4x - 2y + z - 1 = 0$ и точка $M(-2, -1, 5)$. Да се намери точка H от равнината α, за която разстоянието MH е възможно най-малко. $\{-\frac{34}{21}, -\frac{25}{21}, \frac{107}{21}\}$

19. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на функцията

$f(x,y) = xy + x^2 - 2y$ в областта $D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$. $-2, \{x = 0, y = 1\},\ 4, \{x = 2, y = 0\}$

20. Да се намери лицето на ΔABC, ако $A(2,-3)$, $B(6,0)$ и $C(3,7)$. $\frac{37}{2}$

21. Да се намери неизвестната матрица X от матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.X.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 19 & -4 & 23 \\ 10 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

22. Да се намерят корените на уравнението $5\cos 2x = 3\ln x$.

$\{x \to 0.8383817772751789\}, \{x \to 2.671460956514333\}, \{x \to 3.5015087498749513\}$

23. Да се реши системата $\begin{cases} |x-1| + |y+2| = 8 \\ |x+3| + |y-6| = 10 \end{cases}$. $\{x \to -6, y \to -1\}, \{x \to 4, y \to 3\}$

24. Намерете обиколката на елипсата $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. $L = 15.865439589290586$

25. Даден е затворен контур, състоящ се от правоъгълник с дължини на страните a и b, като вместо едната от страните с дължина a е начертана външно полуокръжност с диаметър равен на a. Зададен е периметърът на контура $P = \text{const}$. Определете стойностите на a и b, осигуряващи максимум на заградената от контура площ S, а така също и максималната стойност на S.

$$a = \frac{2p}{4+\pi} \qquad b = \frac{p}{4+\pi} \qquad S_{max} = \frac{p^2}{8+2\pi}$$

26. Нека M_n е множеството от числата, които са записани само с цифри 1 и 2, няма две двойки непосредствено една след друга и сборът на всички цифри е равен на n. Например $M_5 = \{212, 1112, 1121, 1211, 2111, 11111\}$, $|M_5| = 6$

$M_6 = \{1212, 2112, 2121, 11112, 11121, 11211, 12111, 21111, 111111\}$, $|M_6| = 9$.
Намерете стойността на $|M_{125}|$, т.е. броя на елементите в множеството M_{125}.
$$50496833395220461376 1$$

27. Пресметнете интеграла $\iiint_D e^{-(x+y^2+z^3)} dxdydz$, където D: $\{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\text{Gamma}[\frac{4}{3}] \approx 0.7913824870303212$$

28. Решете диференциалното уравнение $y'' + 5y' + 6y = 0$ при начални условия $y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$ $6e^{-2x} - 5e^{-3x}$

29. Намерете сумата на реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{a^n} x^n$ при $|x| < a$. $\frac{2a^2x}{(a-x)^3}$

30. Решете ребуса $\overline{324a}$. $a = \overline{292b1}$, където a и b са неизвестни цифри. $a = 9,\ b = 4$