***XI НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА***

***ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“***

***ВЕЛИКОТЪРНОВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЙ“,***

***8-10 НОЕМВРИ 2024 Г.***

## ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА А

**1.** Пресметнете

$$\sqrt{2024+\sqrt[3]{2024+\sqrt[4]{2024}}}+\sqrt[4]{2024+\sqrt[3]{2024+\sqrt{2024}}}$$

с точност 20 знака след десетичната запетая.

**2.** Преобразувайте числото $a = 2024202420242024202420242024202420242024_5$ от петична в десетична бройна система и го разложете на прости множители.

**3.** Кое от числата $\prod_{n=1}^{2024}\left(\frac{n+1}{750}\right)$ и $\frac{1}{11}$ е по-голямо?

**4.** Да се намери алгебричният вид на комплексното число $\frac{(19\sqrt{3}+17i)^{48}}{(2-i\sqrt{3})^{138}}$

**5.** Намерете максималната стойност на $|z^3 - z + 2|$, където $z$ е комплексно число с модул 1.

**6.** Намерете най-малкото естествено число $n$, такова че $n!$ завършва с точно 2024 нули.

**7.** Да се намерят всички естествени числа $k \geq 2$, такива че цифрите на позиции $k-1$, $k$ и $k+1$ в числото $\sqrt{15}$ (взети в този ред) образуват числото $k$.

**8.** Да се намери полином $P(x)$ от 6-та степен с реални коефициенти, такъв че, $P(0) = 45$, $P(1) = 1$, $P(2) = 5$, $P(3) = 9$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{x^6} = 1$ и $P(x) \geq x^2$ за всяко реално $x$.

**9.** Да се пресметне детерминантата на квадратната матрица от ред 24 с елементи

$$a_{ij} = \binom{i+j}{i}, \quad 1 \leq i,j \leq 24.$$

**10.** Апроксимацията на Стирлинг ни казва, че $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+R_n)$, където $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Да се пресметне $\lim\limits_{n\to\infty} n\,R_n$ .

**11.** Известно е, че дробта $\frac{355}{113}$ апроксимира числото $\pi$ с точност до 6 знака след десетичната запетая ( $\frac{355}{113} = 3.\mathbf{141592}9204\ldots$ ). Да се намери най-малкото естествено число q, такова че за някое естествено число p, дробта $\frac{p}{q}$ апроксимира $\pi$ с точност 7 знака след десетичната запетая (т.е. съвпадат първите 7 цифри след десетичната запетая в десетичното представяне на $\pi$ и $\frac{p}{q}$ ).

**12.** Даден е петоъгълник с върхове $A(0,4), B(3,1), C(7,3), D(5,8), E(1,7)$. Да се намерят координатите на точка $P(x,y)$, за която сборът от разстоянията до върховете на петоъгълника е минимален.

**13.** Намерете най-голямата стойност на $n$, за която $2024^n$ дели без остатък 2024!

**14.** Намерете всички решения на числовото сравнение

$$x^{2024} - 2023x^{202} + 101x^2 + 1 \equiv 0\ (mod\ 216)$$

банкаДСК otp group
Национална програма Образование с наука
celtis
ExpertA the Web software company
bgERP СОФТУЕР ЗА УПРАВЛЕНИЕ НА БИЗНЕС
mentormate Part of Tietoevry Create

**15.** Пресметнете $\frac{1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\cdots}{\frac{1}{3!}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\cdots}$

**16.** Функцията $f$ е дефинирана в множеството на целите числа и удовлетворява условията

$$f(x)=\begin{cases} x-10 & \text{за } x>100, \\ f(f(x+11)) & \text{за } x\le 100. \end{cases}$$

Да се докаже, че $f(x)=91$ за всяко цяло положително число $x\le 100$.

**17.** Всяко естествено число може да се представи по единствен начин като сбор на различни числа на Фибоначи. Намерете броя на събираемите в представянето на $20242024$ по този начин.

**18.** Колко са простите числа в редицата $\{20^n+24^n+1\}, n=1,2,3,\ldots,2024$?

**19.** Да се намери уравнението на права, която се допира до графиката на полинома $x^4-4x^3$ в две различни точки.

**20.** Дадени са равнина $\mu: 2x+y-2z-21=0$ и точка $M(5,-1,3)$. Да се намерят координатите на точка $P$, симетрична на $M$ относно равнината $\mu$.

**21.** Даден е тетраедър с върхове $A(5,1,2)$, $B(2,7,1)$, $C(6,8,3)$, $D(3,4,7)$. Нека $G$ е центроидът (центъра на тежестта) на тетраедъра. Да се начертаят на един чертеж тетраедъра $ABCD$ и тетраедър, хомотетичен на дадения, с център на хомотетия $G$ и 2 пъти по-голям обем от този на тетраедъра $ABCD$.

**22.** Да се намери броят на естествените числа $n\le 1000$, такива че нито $n$, нито $n+1$ могат да се представят като сбор на три квадрата на цели числа.

**23.** Да се докаже, че уравнението $f'(x)=0$ има реален корен в интервала $(0,1)$, където

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$$

**24.** Да се пресметне $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x^2)}$

**25.** Намерете най-големия корен на уравнението $e^{x/20}+\sin(24x)=0$.

**26.** Да се намери разстоянието между елипсата $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ и правата $2x+y=5$.

**27.** Дадена е триъгълна област T, заградена от страните на триъгълник $ABC$, с върхове $A(0,2)$, $B(8,1)$, $C(2,9)$. Областта $\Omega$ се състои от всички точки $M$ в равнината на разстояние $\le 1$ от триъгълната област T. Да се начертаят на един чертеж триъгълника $ABC$ и областта $\Omega$. Да се пресметне лицето на областта $\Omega$.

**28.** Колко пъти се пресичат графиките на функциите $y=\sin x$ и $y=\frac{x}{2024\pi}$ при $x>0$?

**29.** Намерете обема на тялото ограничено от повърхнината с уравнение

$$\left(\frac{x}{20}\right)^2+\left(\frac{y}{22}\right)^2+\left(\frac{z}{24}\right)^2=1.$$

**30.** Дадена е функцията $f(x)=e^{-x}\cos x$. Докажете, че частното $\frac{f^{(2024)}(x)}{f(x)}$ между 2024-та производна и функцията е точна степен на 2.

---

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се точност на използваната система за компютърна математика, ако в условието на задачата това не е уточнено.
Всяка задача се оценява с 2 точки.

банкаДСК otp group
Национална програма Образование с наука
celtis
ExpertA the Web software company
bgERP СОФТУЕР ЗА УПРАВЛЕНИЕ НА БИЗНЕС
mentormate Part of Tietoevry Create