XI НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА

ПО КОМПЮТЪРНА МАТЕМАТИКА „АКАДЕМИК СТЕФАН ДОДУНЕКОВ“

ВЕЛИКОТЪРНОВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЙ“

8-10 НОЕМВРИ 2024 Г.

ЗАДАЧИ ЗА ГРУПА Б

1. Намерете лицето на фигурата, ограничена от кривите $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.
2. Намерете разликата между най-голямата и най-малката стойност на y координатата на точки от кривата, зададена в полярни координати $r = \frac{14}{9}(1 - \sin t),\ t \in [0,2\pi]$.
3. Колко пъти се пресичат графиките на функциите $y = \sin x$ и $y = \frac{x}{10\pi}$ при $x > 0$?
4. Намерете границата $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{3x}{\sin(x-1)}}$.
5. За функцията $f(x) = \operatorname{tg} x$ пресметнете $f'(\operatorname{arctg} 4)$.
6. Пресметнете $\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^4$.
7. Намерете броя на двойките цели положителни числа $(a, b),\ a \le b,$ за които $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{72}$.
8. Намерете остатъка при делението на $\sum_{n=1}^{1000} n!$ на 143.
9. Пресметнете $\int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}\right) dx$.
10. Да се реши системата $\begin{vmatrix} x + y + z = 36 \\ 4x + 3y + 5z = 136 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 464 \end{vmatrix}$.
11. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията
$$z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$$
в затворения триъгълник, ограничен от координатните оси и правата $x + y + 5 = 0$.
12. Намерете уравнението на допирателната към елипсата $x = 10\cos t, y = 6\sin t$ в точката, съответстваща на $t = \frac{\pi}{3}$. Направете чертеж.
13. Намерете всички четирицифрени числа x, за които след отстраняване на средните две цифри се получава числото $\sqrt{x}$.
14. Страните на триъгълник имат уравнения $x + 7y - 11 = 0, x + y + 4 = 0, x - 5y - 7 = 0$. Да се намери лицето на триъгълника.
15. Да се намери дължината на общата хорда на двете окръжности: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 13 = 0$ и $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$.
16. Намерете ранга на матрицата $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$.

банкаДСК otp group
Национална програма Образование с наука
celtis
ExpertA the Web software company
bgERP СОФТУЕР ЗА УПРАВЛЕНИЕ НА БИЗНЕС
mentormate Part of Tietoevry Create

17. Да се намери лицето на ротационната повърхнина, получена при въртенето на кривата $y = e^{-\frac{x}{2}},\ x \in [0, +\infty)$ около оста Ox.
18. Определете с колко нули завършва числото 2024!.
19. Графиката на квадратната функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ минава през точките $(0, -1), (1,7), (2,17)$. Намерете $f(3)$.
20. Да се пресметне $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(e^x+1)(x^2+1)} dx$.
21. Да се реши уравнението $2^{-|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1| + |x-1|)$.
22. Да се намери обемът на тялото заградено от повърхнините $z = x^2 + y^2$ и $z = 8 - x^2 - y^2$.
23. Да се намери лицето на фигурата, заградена от параболата $y = -2x^2 + 2x + 4$ и абсцисната ос.
24. Намерете дължината на най-късата отсечка AB, ако точката A лежи на елипсата

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1,$$

а точката B лежи на правата $2x - 3y + 25 = 0$.
25. Намерете разстоянието от точката $A(2, 3, -1)$ до правата

$$p: \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$$

26. Намерете лицето на фигурата, ограничена от кривата, зададена в полярни координати $r = a|\sin 2t|,\ t \in [0, 2\pi]$. Направете чертеж при $a = 1$.
27. Намерете дължината на дъгата от кривата $y = \frac{2}{\pi} \ln \sin \frac{\pi x}{2}$ от $x = \frac{1}{2}$ до $x = \frac{3}{2}$.
28. Намерете дължината на примката на кривата $x = t^2,\ y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right)$.
29. Решете диференциалното уравнение $y'' - y = x^2$ с начални условия $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.
30. Пресметнете двойния интеграл $\iint_D xy^2 dxdy$, където D е параболичния сегмент, ограничен от линиите $y^2 = x,\ x = 1$.

Всички числени пресмятания да се извършват с подразбиращата се точност на използваната система за компютърна математика.

Всяка задача се оценява с 2 точки.

банкаДСК otp group
Национална програма Образование с наука
celtis
ExpertA the Web software company
bgERP СОФТУЕР ЗА УПРАВЛЕНИЕ НА БИЗНЕС
mentormate Part of Tietoevry Create